Géométrie symplectique et fibrés de Green

Auteur : Juan Kurchan
Maître de stage : Ezequiel Maderna

Université Paris-Dauphine PSL
Master M2 MATH
Année académique : 2024-2025

Résumé

Ce mémoire de Master porte sur la géométrie symplectique et ses applications à la théorie des systèmes dynamiques. La géométrie symplectique offre une reformulation de la mécanique classique et hamiltonienne dans le langage de la géométrie différentielle, permettant ainsi l'usage de nombreux arguments topologiques et géométriques pour aborder une variété de problèmes.

Dans un premier temps, ce mémoire présente les bases de la géométrie symplectique, en offrant quelques digressions, mais sans prétendre à l'exhaustivité.

La seconde partie est consacrée au cœur du stage : la construction des fibrés de Green. Cette construction, issue à l'origine de la géométrie riemannienne, est ici quelque peu généralisée à une plus grande famille de flots que dans le cas riemannien. Nous terminerons ce mémoire par une présentation de quelques applications à la dynamique des fibrés de Green.

Table des matières

1 Introduction à la Géométrie symplectique **3**
1.1 Algèbre linéaire symplectique 3
1.2 Variétés symplectiques 6
1.3 Fibré cotangent 8
1.4 Les différentes sous-variétés 13
1.5 L'astuce de Moser, le théorème de Darboux et quelques applications 14
1.6 Autour des théorèmes de Weinstein 18

2 Mécanique Hamiltonienne **24**
2.1 Champ Hamiltonien et équations d'Hamilton-Jacobi 24
2.2 Principe variationnel et équations d'Euler-Lagrange 27
2.3 Transformation de Legendre 29

3 Fibrés de Green et applications **32**
3.1 Formes quadratiques et champs de formes quadratiques 32
3.2 Construction des fibrés de Green 33
3.3 Utilisations des fibrés de Green en dynamique 47
3.4 Note sur les points conjugués, champs de Jacobi en géométrie Riemannienne 48

1 Introduction à la Géométrie symplectique

1.1 Algèbre linéaire symplectique

On considérera dans toutes la section un espace vectoriel réel V, de dimension m, munie d'une forme bilinéaire antisymétrique Ω, c'est à dire tel que pour tout couple de vecteurs, $\Omega(u,v) = -\Omega(v,u)$. On supposera très vite la forme bilinéaire non dégénérée.

Tour comme avec un produit scalaire, pour un sous-espace vectoriel W de V, on peut définir l'ensemble "orthogonal pour Ω" : $\{v \in V \mid \forall w \in W, \Omega(v,w) = 0\}$. On le notera $W^{\perp_\Omega}$, ou simplement $W^\perp$ si il n'y a pas d'ambiguïté avec un quelconque produit scalaire.
On prendra garde au fait que pour une forme bilinéaire antisymétrique, on a pas en général $U \cap U^\perp = \{0\}$, par exemple pour tout vecteur v, $v \in \mathrm{Vect}\{v\} \cap \mathrm{Vect}\{v\}^\perp$.

Proposition 1.1 (Forme canonique des formes bilinéaires antisymétrique)**.** *Soit Ω une forme bilinéaire antisymétrique sur un espace vectoriel V. Il existe une base $e_1, \dots e_i, f_1, \dots, f_i, g_1, \dots g_j$ de V tel que*

$$\begin{aligned}
&\Omega(g_k, .) = 0 \\
&\Omega(e_k, e_l) = \Omega(f_k, f_l) = 0 \\
&\Omega(e_k, f_l) = \delta_{kl}
\end{aligned}$$

La matrice de l'application bilinéaire Ω dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & Id & 0 \\ -Id & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Cette base n'est pas unique, mais on l'appelle tout de même *base canonique*, et on dit qu'on a écrit l'application sous *forme canonique*.

Démonstration. On fait la preuve par récurrence.

On pose $U \coloneqq \{u \in V \mid \forall v \in V, \Omega(u,v) = 0\}$,c'est un sous-espace vectoriel, on lui choisit une base $u_1, \dots u_k$. On choisit un supplémentaire W de U dans V : $V = U \oplus W$.

On choisit e_1 dans W, puisqu'il n'est pas dans U, il existe un f_1 dans W tel que $\Omega(e_1, f_1) \neq 0$. Quitte à renormaliser, on peut choisir $\Omega(e_1, f_1) = 1$.

On pose $W_1 \coloneqq \mathrm{Vect}\{e_1, f_1\}$, $\tilde{W_1} \coloneqq W \cap W_1^\perp$. On va montrer que $W = W_1 \oplus \tilde{W_1}$.

Soit v dans $W_1 \cap \tilde{W_1}$. Pour $v = ae_1 + bf_1$, on a

$$\begin{aligned}
0 = \Omega(v, e_1) = -b \\
0 = \Omega(v, f_1) = a
\end{aligned}$$

donc $v = 0$, soit $W_1 \cap \tilde{W_1} = \{0\}$.
D'autre part pour v dans W, avec $\Omega(v, e_1) = c$, $\Omega(v, f_1) = d$, alors $v = (-cf_1 + de_1) + (v + cf_1 - de_1)$. Le premier terme est dans W_1, un calcul rapide montre que le second est dans $\tilde{W_1}$. On peut donc conclure.

On réitère alors ce raisonnement, on choisit e_2 dans $\tilde{W}_1$ différent de 0, puis f_2 dans $\tilde{W}_1$ tel que $\Omega(e_2, f_2) = 1$. On pose $W_2 \coloneqq \text{Vect}\{e_2, f_2\}$ puis on refait la même preuve de décomposition.

Puisque V est de dimension finie, le procédé se termine et on trouve la décomposition $V = U \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$. Les u_i, e_j, f_k respectent bien les relations demandées (en les remettant correctement en ordre dans une base, on trouve bien la forme canonique pour la matrice de Ω). □

En particulier, lorsque l'application bilinéaire Ω est non dégénérée, soit que le sous-espace vectoriel U est réduit à $\{0\}$, on dit que l'application bilinéaire est *symplectique*. Dans ce cas, la donné de (V, Ω) est appelé espace vectoriel symplectique.

Nécessairement, un espace vectoriel symplectique est de dimension paire. Réciproquement, sur chaque espace vectoriel de dimension paire, on peut construire une forme bilinéaire symplectique à partir d'une base en définissant l'application pour qu'elle vérifie les relations de la proposition précédente, mais il n'y a bien sûr pas unicité de la forme symplectique sur l'espace.

On donne maintenant quelques propriétés d'orthogonalité symplectique.

Proposition 1.2. *Soit (V, Ω) un espace vectoriel symplectique, W et Y des sous-espaces vectoriels, on note encore $W^\perp$ l'orthogonal symplectique correspondant. On a alors :*

1. $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$
2. $(W^\perp)^\perp = W$
3. $Y \subset W \Leftrightarrow W^\perp \subset Y^\perp$

Démonstration. On s'intéresse à l'application linéaire $A : V \to W^* : v \to \Omega(v, .)_{|W}$. On remarque que $\ker(A) = W^\perp$, $\text{Im}(A) = W^*$, donc le théorème du rang nous donne $\dim V = \dim W^\perp + \dim W^* = \dim W^\perp + \dim W$.

Pour le deuxième point, d'une part, $(W^\perp)^\perp = \{v \in V \mid \forall w \in W^\perp, \Omega(v, w) = 0\}$, donc en particulier tous les éléments de W sont dans $(W^\perp)^\perp$, soit $W \subset (W^\perp)^\perp$. De plus, en appliquant le théorème du rang à W et à $W^\perp$ on trouve $\dim W^\perp + \dim W = \dim V = \dim(W^\perp)^\perp + \dim W^\perp$, puis $\dim W = \dim W^\perp$. L'inclusion et égalité des dimension donne l'égalité des espaces vectoriels.

Soit $Y \subset W$ et v dans $W^\perp$, on a pour tout w dans $Y \subset W$, $\Omega(v, w) = 0$, donc v est dans $Y^\perp$. Pour avoir l'autre implication on utilise le même raisonnement sur $Y^\perp$ et $W^\perp$ couplé au deuxième point de la proposition montré précédemment. □

Définition 1.3. *Soit (V, Ω) un espace vectoriel symplectique, et W un sous-espace vectoriel de V. On dit que W est*

1. *isotrope si $W \subset W^\perp$ (i.e. $\Omega_{|W \times W} = 0$)*
2. *coïsotrope si $W^\perp \subset W$*
3. *lagrangien si $W^\perp = W$*
4. *symplectique si $W \cap W^\perp = \{0\}$ (i.e. $\Omega_{|W \times W}$ est non dégénérée)*

À partir de la formule des dimensions, on trouve directement :

Proposition 1.4. *Dans un espace vectoriel symplectique (V, Ω) on a pour un sous-espace vectoriel W que*

1. *si W est isotrope, alors* $\dim W \leq \frac{1}{2}\dim V$*, et il est lagrangien si et seulement si on a égalité.*
2. *W est symplectique si et seulement si $V = W^\perp \oplus W$*

Proposition 1.5. *Dans un espace vectoriel symplectique (V, Ω), toute droite vectorielle est isotrope, tout sous-espace de codimension 1 est coïsotrope.*

Démonstration. Pour $W = \mathrm{Vect}(x)$, par antisymétrie $\Omega(\lambda x, \mu x) = \lambda\mu\Omega(x, x) = 0$, soit $\mathrm{Vect}(x) \subset W^\perp$.

Puis si W est un sous-espace de codimension 1, par la formule des dimensions, $W^\perp$ est de dimension 1, puis est isotrope, c'est-à-dire $W^\perp \subset (W^\perp)^\perp = W$, soit W est coïsotrope. □

Nous concluons cette première sous-section en montrant un lien entre algèbre linéaire symplectique et les théories de Lie. Un autre lien similaire sera exhibé à la fin de la sous-section suivante.

Définition 1.6. *Soient (V_1, Ω_1) et (V_2, Ω_2) deux espaces vectoriels symplectiques. Une application linéaire $f : V_1 \to V_2$ est dite symplectique si*

$$f^*\Omega_2 \coloneqq \Omega_2(f(.), f(.)) = \Omega_1$$

Proposition 1.7. *Avec les notations de la définition précédente, f est automatiquement injective, en particulier si V_1 et V_2 ont même dimension f est un isomorphisme d'espace vectoriel. On l'appelle isomorphisme symplectique.*

Démonstration. Soit x dans V_1 non nul, puisque Ω_1 est non dégénérée, il existe y dans V_1 tel que $\Omega_1(x, y) \neq 0$, puis $\Omega_2(f(x), f(y)) = \Omega_1(x, y) \neq 0$, donc nécessairement $f(x) \neq 0$. Donc f est injective, puis si il y a égalité des dimensions elle est bijective. □

Proposition 1.8. *Soient (V_1, Ω_1), (V_2, Ω_2),(V_3, Ω_3) des espaces vectoriels symplectiques, et soient $f : V_1 \to V_2$, $g : V_2 \to V_3$ des applications linéaires symplectiques.*

L'application $g \circ f : V_1 \to V_3$ est une application linéaire symplectique, et si $\dim V_1 = \dim V_2$*, f^{-1} est aussi une application linéaire symplectique.*

Démonstration. Les propriétés des tirées en arrières nous donne : $f^*\Omega_2 = \Omega_1, g^*\Omega_3 = \Omega_2 \Rightarrow (g \circ f)^*\Omega_3 = f^*g^*\Omega_3 = f^*\Omega_2 = \Omega_1$.

D'autres part si f est inversible on a $\Omega_2 = (f \circ f^{-1})^*\Omega_2 = (f^{-1})^*f^*\Omega_2 = (f^{-1})^*\Omega_1$, soit f^{-1} est symplectique. □

On déduit directement de cette proposition :

Définition-Proposition 1.9. *Soit (V, Ω) un espace vectoriel symplectique,on appelle groupe symplectique de (V, Ω) et on note* $\mathrm{Sp}(V, \Omega)$ *l'ensemble des automorphismes symplectiques. C'est un groupe.*

Proposition 1.10. $\mathrm{Sp}(V, \Omega)$ *est un sous-groupe fermé de* $\mathrm{GL}(V)$*, c'est donc un groupe de Lie pour la topologie induite.*

Démonstration. C'est immédiat que c'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$, il est fermé car est l'image réciproque de $\{0\}$ par l'application $g \to g^*\Omega - \Omega$ allant de $\mathrm{GL}(V)$ dans l'ensemble des applications bilinéaires. Et cette application est continue car affine entre espaces vectoriels de dimensions finies. On applique alors le théorème de Cartan sur les sous-groupes fermés des groupes de Lie. □

On va maintenant s'intéresser à l'algèbre de Lie de $\mathrm{Sp}(V,\Omega)$.

Lorsque l'on pose une base canonique de (V,Ω), et que l'on note A la matrice d'un automorphisme symplectique f, la condition $f^*\Omega = \Omega$ s'écrit $A^TJA = J$, avec $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$. On note l'ensemble des matrices vérifiant cette équation $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$, il est bien sur isomorphe à $\mathrm{Sp}(V,\Omega)$.

Proposition 1.11. *L'algèbre de Lie de* $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ *est l'ensemble des matrices* $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_1^T \end{pmatrix}$ *avec* A_2 *et* A_3 *symétriques. On note cette algèbre de Lie* $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R})$.

On en déduit que les dimensions du groupe et de l'algèbre de Lie sont égales à $2n^2+n$.

Démonstration. On rappelle que pour les sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$, la matrice A est dans l'algèbre de Lie si pour tout réel t, $\exp(tA)$ est dans le groupe de Lie, ici on a donc que A est dans $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R})$ si $\exp(tA)^TJ\exp(tA) = J$. En dérivant cette expression selon t, on obtient :

$$(A\exp(tA))^TJA + AJ(A\exp(tA)) = 0$$

Puisque $t \to \exp(tA)$ est l'unique solution de l'équation

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt}(t) = A \circ \phi(t) \\ \phi(0) = Id \end{cases}$$

Puis en appliquant à $t=0$, on obtient $AJ+JA=0$. (On aurait pu appliquer le même raisonnement aux applications linéaires sans repasser par l'écriture matricielle, on aurait trouvé $\Omega(A.,.)+\Omega(.,A.)$, ce qui est bien équivalent)

Puis cette équation matricielle nous donne l'écriture donné pour la matrice A.

Enfin comme la dimension de l'espace des matrices symétriques de taille $n\times n$ est $\frac{n(n+1)}{2}$, on trouve comme dimension totale $2\frac{n(n+1)}{2} + n^2 = 2n^2+n$. □

$\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R})$ est une algèbre de Lie simple, son complexifié $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$ est l'une des algèbres e Lie classiques.

1.2 Variétés symplectiques

La géométrie différentielle passe la plupart du temps par l'étude des espaces tangents des variétés, nombreux domaines d'études se caractérise alors par l'ajout de structure sur les espaces tangents, et on demande à ce que ces structures "varient continûment" (ou plutôt "lissement") lorsqu'on fait varier les espaces tangents. Par exemple pour la géométrie Riemannienne, on construit la "métrique Riemannienne" sur la variété pour avoir sur chaque espace tangent un produit scalaire.

Ici l'idée est similaire, on veut que chaque espace tangent soit un espace vectoriel symplectique. On va donc demander l'existence d'une 2-forme sur notre variété qui soit tel que sur chaque tangent la 2-forme soit une forme bilinéaire antisymétrique, et non dégénérée.

Nous verrons que cette condition se montrera étonnamment restrictive, bien qu'elle soit suffisamment naturelle pour qu'elle apparaisse dans une construction habituelle : le fibré cotangent.

Définition 1.12. *Sur une variété M, une 2-forme différentielle ω est dite symplectique si elle est fermée et si pour tout point p de M, ω_p est une application bilinéaire symplectique. (T_pM, ω_p) est alors un espace vectoriel symplectique.*

Définition 1.13. *La donnée de (M, ω), ω forme symplectique, est appelé variété symplectique.*

L'exemple le plus immédiat est $M = \mathbb{R}^{2n}$, qui pour les coordonnées $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, est muni de la forme $\omega_0 = \sum_i dx_i \wedge dy_i$.

On peut se demander à quel point il est difficile pour une variété différentielle d'être symplectique. On remarque immédiatement que la dimension doit être paire. Nous donnons ici une première condition topologique nécessaire au caractère symplectique.

Proposition 1.14. *Soit un espace vectoriel symplectique (V, Ω) de dimension $2n$. Le produit extérieur n-ième $\Omega^n = \Omega \wedge \cdots \wedge \Omega$ est non nul, soit est une forme volume.*

On déduit que pour une variété différentielle (V, ω), ω^n est une forme volume.

Démonstration. Quand on choisit une base canonique de V, Ω s'écrit $\sum_i e_i^* \wedge f_i^*$. Puis en faisant n produit de ce même terme, les seuls termes non nuls sont ceux de la forme $(e_1^* \wedge f_1^*) \wedge \dots (e_n^* \wedge f_n^*)$, et toutes ses permutations, il y en a $n!$. On trouve donc $\Omega^n = n!(e_1^* \wedge f_1^*) \wedge \dots (e_n^* \wedge f_n^*)$, qui est bien une forme volume.

On applique ensuite ce résultat à ω_p pour tout p dans M. On obtient bien une forme de degré maximal qui ne s'annule en aucun point de la variété. □

Donc toute les variétés symplectiques sont orientables. On appelle *volume symplectique* ou *volume de Liouville* la forme volume $\frac{\omega^n}{n!}$.

Proposition 1.15. *Soit (V, ω) une variété symplectique compacte connexe, et soit ω^n sa forme volume obtenue à partir de ω.*

Les classes de cohomologie de de Rham $[\omega^n] \in H^{2n}(M)$ et $[\omega] \in H^2(M)$ sont non nulles. En particulier le groupe de de Rham $H^2(M)$ est non réduit à $\{0\}$.

Démonstration. Puisque la variété est orientable et compacte, on peut utiliser la dualité de Poincaré, en particulier : $\int_M : H^{2n}(M) \to \mathbb{R} : \alpha \to \int_M \alpha$ est un isomorphisme.

Puisque la variété est supposé connexe et que ω^n est une forme volume, soit ne s'annule pas, on a nécessairement que $\int_M \omega^n \neq 0$, puis $[\omega^n] \neq 0$.

Enfin si $[\omega] = 0$, on trouverait $[\omega^n] = [\omega] \cup \cdots \cup [\omega] = 0$, donc nécessairement $[\omega] \neq 0$. □

On vient donc de trouver une condition nécessaire sur la cohomologie des variétés pour être symplectique.

Proposition 1.16. *La seule sphère pouvant être munie d'une structure symplectique est la sphère $\mathbb{S}^2$.*

Démonstration. On rappelle que les groupes de cohomologie de de Rham des sphères sont $H^k(\mathbb{S}^n) = \mathbb{R}$ si $k = 0$ ou n, $\{0\}$ sinon, en particulier dès que n est différent de 2, $H^2(\mathbb{S}^n) = 0$.

Pour ce qui est de $\mathbb{S}^2$, on peut poser la fonction hauteur h par rapport à la verticale, et θ la fonction angle autour de l'axe vertical.

On pose alors $\omega = dh \wedge d\theta$.

On remarque que θ n'est pas définit correctement aux pôles, mais dh s'annule aux pôles, donc on définit ω par partie en exigeant qu'elle soit nulle aux pôles. On peut similairement construire une autre 2-forme autour d'un autre axe, qui ne serait pas bien défini dans les points de coordonnées $(1,0,0)$, $(-1,0,0)$. Puis on remarque que les deux formes sont identiques sur la sphère privé des quatre points, on définit alors ω par partie, égale aux deux 2-formes.

On a bien $d\omega = 0$, et elle est non dégénérée, en effet $\omega(\partial h, \partial\theta) = 1$, donc $(\partial h, \partial\theta)$ forme une base symplectique locale. □

Chaque fois qu'on étudie une nouvelle famille d'objets en mathématiques, il faut se demander ce que veut dire pour deux exemples "d'être les mêmes", on pose la définition suivante :

Définition 1.17. *Soient (M_1, ω_1), (M_2, ω_2) deux variétés symplectiques. On dit que $f : M_1 \to M_2$ est une symplectomorphisme si c'est un difféomorphisme et si $f^*\omega_2 = \omega_1$.*

1.3 Fibré cotangent

On s'intéresse maintenant au cas du fibré cotangent d'une variété, qui possède toujours une structure de variété symplectique canonique.

En physique mathématique et mécanique hamiltonienne, l'ensemble des positions possibles des éléments du système, appelé espace de configuration, est une variété différentielle, et l'espace des phases du système est alors le cotangent de la variété.

La proposition 1.15 ne s'appliquera pas puisqu'un fibré (co)tangent n'est jamais compact.

Pour la clarté des notations, on pose X une variété différentielle de dimension n, $M \coloneqq T^*X$ son fibré cotangent, x un élément de X, $p = (x, \xi)$ un élément de M, et $\pi : M \to X : (x, \xi) \to x$.

On rappelle rapidement qu'on a $d_{(x,\xi)}\pi : T_xX \oplus T_x^*X \to T_xX : (v_x, v_\xi) \to v_x$, soit $d\pi : TM \to TX : ((x,\xi),(v_x,v_\xi)) \to (x, v_x)$.

En effet sur un ouvert U de X, on a $T^*X_{|U} \simeq U \times (\mathbb{R}^n)^* \simeq U \times \mathbb{R}^n$. Comme $T_{(a,b)}A \times B \simeq T_aA \times T_bB$. On a ici $T_{(x,\xi)}M \simeq T_{(x,\xi)}T^*X \simeq T_xX \times T_\xi T_x^*X = T_xX \oplus T_\xi T_x^*X$. Or T_x^*X est un espace vectoriel, donc $T_\xi T_x^*X \simeq T_x^*X$, donc $T_{(x,\xi)}M \simeq T_xX \oplus T_x^*X$.

Et $d_{(x,\xi)}\pi : T_xX \oplus T_x^*X \to T_xX : (v_x, v_\xi) \to v_x$ puisque l'application ne varie pas quand la deuxième valeur du couple varie.

Maintenant pour $d_p\pi : T_pM \to T_xX$, on note $(d_p\pi)^* : T_x^*X \to T_p^*M$ sa transposée (application duale).

Définition 1.18. *[1-forme de Liouville] On définit la 1-forme tautologique, ou 1-forme de Liouville α sur M ponctuellement par :*

$$\forall p = (x,\xi) \in M, \alpha_p = \xi \circ d_p\pi = (d_p\pi)^*\xi : T_p^*M \to \mathbb{R}.$$

Proposition 1.19. *Soit $(U, x_1, \ldots, x_n)$ des coordonnées locales de X, avec ses coordonnées cotangentes associées $(T^*U, x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$. On a sur tout T^*U, $\alpha = \sum_i \xi_i dx_i$.*

Démonstration. Soit p dans T^*U et v un vecteur tangent dans T_pT^*U, qui s'écrit dans la carte donnée $v = \sum_i a_i \partial x_i|_p + b_i \partial \xi_i|_p$.

On a d'une part :

$$\xi \circ d_p\pi(v) = \xi \circ d_p\pi(\sum_i a_i \partial x_i|_p + b_i \partial \xi_i|_p) = \xi(\sum_i a_i \partial x_i|_p) = \sum_i a_i \xi(\partial x_i|_p) = \sum_i a_i \sum_j \xi_j|_p dx_j|_p(\partial x_i|_p) = \sum_i a_i \xi_i|_p$$

D'autre part :

$$\sum_j \xi_j|_p dx_j|_p(v) = \sum_j \xi_j|_p dx_j|_p(\sum_i a_i \partial x_i|_p + b_i \partial \xi_i|_p) = \sum_i \sum_j \xi_j|_p \delta_{ij} a_i = \sum_i a_i \xi_i|_p$$

□

On définit alors la forme symplectique canonique de la façon suivante :

Définition-Proposition 1.20. *On définit la forme symplectique canonique de T^*X par $\omega = -d\alpha$. C'est bien une forme symplectique au sens usuel.*

Démonstration. Elle est bien fermée puisque $d(-d\alpha) = 0$, puis en coordonnées locales, on trouve $-d(\sum_i \xi_i dx_i) = \sum_i dx_i \wedge d\xi_i$, qui est donc (appliqué en un point) la forme canonique d'une application bilinéaire symplectique. □

On donne une propriété remarquable qui caractérise la 1-forme de Liouville, et qui servira par la suite à étudier les sous-variétés lagrangiennes.

Proposition 1.21. *La 1-forme de Liouville est l'unique 1-forme qui vérifie pour toute 1-forme sur X $\mu : X \to M$, $\mu^*\alpha = \mu$.*

Démonstration. Soit $\mu : X \to M : x \to (x, \mu_x)$ une 1-forme sur X (on prendra garde pour le bien du calcul qui suit à ne pas confondre $\mu(x)$ et μ_x), pour $v \in T_xX$, on a

$$\begin{aligned}\mu^*\alpha_x(v) &= \alpha_{\mu(x)}(d_x\mu(v)) = \alpha_{(x,\mu_x)}(d_x\mu(v)) = \mu_x \circ d_{(x,\mu_x)}\pi \circ d_x\mu(v) \\ &= \mu_x \circ d_(x,\mu_x)\pi \circ d_{\pi(x,\mu_x)}\mu(v) = \mu_x \circ d_{(x,\mu_x)}\pi \circ \mu(v)\end{aligned}$$

Or puisque μ est 1-forme, soit une section, on a $\pi \circ \mu = Id$, puis finalement

$$\mu_x \circ d_{(x,\mu_x)}\pi \circ \mu(v) = \mu_x \circ d_{(x,\mu_x)}Id(v) = \mu_x(v).$$

La forme de Liouville vérifie donc bien la relation donnée.

Soit β une 1-forme vérifiant la même relation, on a :

$$\mu^*(\alpha - \beta) = \mu^*\alpha - \mu^*\beta = \mu - \mu = 0$$

Puis ceci étant vrai pour tout 1-forme, on déduit que $\alpha - \beta = 0$, puis on conclut. □

On donne maintenant un résultat montrant la "naturalité" de cette construction sur le fibré cotangent.

Définition 1.22. *Soit X_1 et X_2 deux variétés différentielles de fibrés cotangent respectifs M_1 et M_2, et de 1-forme de Liouville respectives α_1 et α_2.*

Soit f un difféomorphisme de X_1 vers X_2. On appelle relevé de f, et on note $f_\#$ l'application M_1 vers M_2 vérifiant, pour $p_1 = (x_1, \xi_1)$ dans M_1 :

$$f_\#(p_1) = (f(x_1), (d_{f(x_1)}f^{-1})^*\xi_1) =: (x_2, \xi_2) =: p_2$$

C'est bien une application de M_1 vers M_2, puisque pour $f(x_1) = x_2$ dans X_2, on a $(d_{x_2}f^{-1})^*\xi_1 = \xi_1 \circ d_{x_2}f^{-1}$, $d_{x_2}f^{-1} : T_{x_2}X_2 \to T_{x_1}X_1$ et $\xi_1 : T_{x_1}X_1 \to \mathbb{R}$, soit $(d_{x_2}f^{-1})^*\xi_1 \in T^*_{x_2}X_2$.

On a par construction que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{f_\#} & M_2 \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ X_1 & \xrightarrow[f]{} & X_2 \end{array}$$

Proposition 1.23. *$f_\# : M_1 \to M_2$ est un difféomorphisme.*

Démonstration. Par hypothèse f est un difféomorphisme, on exhibe l'inverse de $f_\# : f_\#^{-1}(x_2, \xi_2) = (f^{-1}(x_2), (d_{f^{-1}(x_2)}f)^*\xi_2) =: (x_1, \xi_1)$.

Pour le caractère lisse, on remarque qu'on compose des fonctions lisses : les différentielles de difféomorphisme sont de manière générale lisses, et l'application $(.)^*$ de tirage en arrière est lisse. □

Proposition 1.24. *Le relevé $f_\#$ tire en arrière la 1-forme de Liouville de M_2 vers celle de M_1 :*

$$(f_\#)^*\alpha_2 = \alpha_1.$$

C'est alors un symplectomorphisme entre les structures de variété symplectique canoniques respectives.

Démonstration. On reprend les notations $p_i = (x_i, \xi_i)$, $f_\#(p_1) = p_2$. Et on prend v dans TM. On a :

$(f_\#)^*\alpha_{2_{p_1}}(v) = \alpha_{2_{f_\#(p_1)}}(d_{p_1}f_\#(v)) = (d_{x_2}f^{-1})^*\xi_1 \circ d_{p_2}\pi_2 \circ d_{p_1}f_\#(v)$ car $p_2 = (x_2, (d_{x_2}f^{-1})^*\xi_1))$, puis
$(d_{x_2}f^{-1})^*\xi_1 \circ d_{p_2}\pi_2 \circ d_{p_1}f_\#(v) = \xi_1 \circ d_{x_2}f^{-1} \circ d_{p_2}\pi_2 \circ d_{p_1}f_\#(v)$
$= \xi_1 \circ d_{p_2}(f^{-1} \circ \pi_2) \circ d_{p_1}f_\#(v) = \alpha_1 \circ d_{p_2}f_\#^{-1} \circ d_{p_1}f_\#(v)$ par lecture du diagramme commutatif, puis
$\alpha_{1_{p_1}} \circ d_{p_2}f_\#^{-1} \circ d_{p_1}f_\#(v) = \alpha_{1_{p_1}} \circ d_{p_1}(f_\#^{-1} \circ f_\#)(v) = \alpha_{1_{p_1}}(v)$ soit $f_\#^*\alpha_2 = \alpha_1$.
On en déduit $f_\#^*\omega_2 = f_\#^*(-d\alpha_2) = -d(f_\#^*\alpha_2) = -d\alpha_1 = \omega_1$.

□

Proposition 1.25. *L'application $(.)_\# : \mathrm{Diff}(X_1) \to \mathrm{Sympl}(M_1)$ est un morphisme de groupe injectif.*

Démonstration. Premièrement $(Id_1)_\#(x, \xi) = (x, (d_xId_1)^*(\xi)) = (x, \xi)$. Ensuite pour f, g deux difféomorphismes de M, on a :

$$(g \circ f)_\#(x, \xi) = (g \circ f(x), (d_{g\circ f(x)}f^{-1} \circ g^{-1})^*\xi) = (g \circ f(x), (d_{f(x)}f^{-1} \circ d_{g\circ f(x)}g^{-1})^*\xi)$$
$$(g \circ f(x), (d_{g\circ f(x)}g^{-1})^*(d_{f(x)}f^{-1})^*\xi) = g_\#(f(x), (d_{f(x)}f^{-1})^*\xi) = g_\#f_\#(x, \xi).$$

Et on trouve directement que si pour tout (x, ξ) dans M, $f_\#(x, \xi) = (x, \xi)$, la première entrée nous donne pour tout x dans X, $f(x) = x$, soit $f = Id_X$, donc l'application est bien injective. □

On peut alors bien sur se demander si cette application est surjective, c'est à dire si tous les symplectomorphismes du cotangent sont des relevés de difféomorphismes. Ce n'est pas le cas, un contrexemple simple est celui des translations le long des fibres.

Prenons par exemple $X = \mathbb{S}$, $M = \mathbb{S}\times\mathbb{R}$, et l'application $f : \mathbb{S}\times\mathbb{R} \to \mathbb{S}\times\mathbb{R} : (x, v) \to (x, v+1)$.

C'est immédiatement un difféomorphisme sur M. Puisque $\pi \circ f = Id_X$, s'il était un relevé, il serait celui de l'identité sur X, or le relevé de l'identité sur X est l'identité sur M. On conclut que f n'a pas d'antécédent par $(.)_\#$.

On donne maintenant un critère caractérisant les symplectomorphisme relevé.

Lemme 1.26. *Soit (M, ω) une variété symplectique, et α une 1-forme vérifiant $\omega = -d\alpha$. Il existe un unique champ de vecteur V vérifiant $\iota_V\omega = -\alpha$.*

Soit g un symplectomorphisme vérifiant $g^*\alpha = \alpha$. g commutent avec le groupe à un paramètre généré par V, c'est-à-dire $\exp(tV) \circ g = g \circ \exp(tV)$.

Démonstration. L'équation $\iota_.\omega = -\alpha$ se traduit par $\omega(., *) = -\alpha(*)$, on conclut à l'existence et l'unicité de V par la non dégénérescence de ω (écrit en coordonnées locales, on trouve la matrice colonne de V en un point base en multipliant par l'inverse de la matrice de ω).

Pour la deuxième égalité, commençons par montrer que $g_*V = V$, c'est à dire que pour p, v dans M, T_pM, on a $V(g(p)) = d_pg(V(p))$:

d'une part : $-\alpha_p(v) = \iota_V\omega_p(v) = \omega_p(V(p), v) = (g^*\omega)_p(V(p), v) = \omega_{g(p)}(d_pg(V(p)), d_pg(v))$
d'autre part : $-\alpha_p(v) = -(g^*\alpha)_p(v) = g^*(\iota_V\omega)_p(v) = \omega_{g(p)}(V(g(p)), d_pg(v))$

puis par non dégénérescence de ω et isomorphie de $d_pg : V(g(p)) = d_pg(V(p))$.

Maintenant, on rappelle que (de manière générale pour n'importe quel champ tiré par difféomorphisme), le flot de g_*V est $g \circ \exp(tV) \circ g^{-1}$ (ce qui se vérifie en comparant les deux EDO correspondantes), autrement dit $\exp(tg_*V) = g \circ \exp(tV) \circ g^{-1}$, puis par la relation précédente $\exp(tV) = g \circ \exp(tV) \circ g^{-1}$ □

Ce lemme est un peu plus général que nécessaire, puisque M n'est pas nécessairement un cotangent, et α n'est donc pas la 1-forme de Liouville.

Proposition 1.27. *Soit X une variété, M son cotangent, soit α la 1-forme de Liouville, et V le champ de vecteur vérifiant $\iota_V\omega = \alpha$. Pour des coordonnées adaptées à M $(T^*U, x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$, V s'écrit $V = \sum_i \xi_i\partial\xi_i$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que la 1-forme $\sum_i \xi_i\partial\xi_i$ vérifie l'équation du produit intérieur. En ces mêmes coordonnées $\omega = \sum_i dx_i \wedge d\xi_i$ et $\alpha = \sum_i \xi_i dx_i$. Par les propriétés du produit intérieur on a :

$$\iota_{\partial\xi_k}(d\xi_i \wedge dx_i) = (\iota_{\partial\xi_k}d\xi_i) \wedge dx_i - d\xi_i \wedge (\iota_{\partial\xi_k}dx_i) = \delta_{ik}dx_i = dx_k \text{ puis} \quad (1)$$

$$-\iota_V\omega = \sum_k \xi_k\iota_{\partial\xi_k}(\sum_i d\xi_i \wedge dx_i) = \sum \xi_k dx_k = \alpha \quad (2)$$

□

Proposition 1.28. *Avec les mêmes hypothèses que dans la proposition précédente, pour (x,ξ) dans M, on a $\exp(tV)(x,\xi) = (x, e^t\xi)$.*

Démonstration. En coordonnées locales adaptées, $\exp(tV)(x,\xi) = \begin{pmatrix} x_i(t) \\ \xi_i(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_i(0) \\ \xi_i(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}$ On a $\frac{d}{dt}(\exp(tV))(x,\xi) = V \circ \exp(tV)$, qui s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} x_i'(t) \\ \xi_i'(t) \end{pmatrix} = V \times \begin{pmatrix} x_i(t) \\ \xi_i(t) \end{pmatrix} = \sum_j \xi_j \partial\xi_j \circ \begin{pmatrix} x_i(t) \\ \xi_i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_i(t) \end{pmatrix}$$

Soit on a le systèmes d'équations différentielles

$$\begin{cases} x_i'(t) = 0, \\ \xi_i'(t) = \xi_i(t), \\ x(0) = x, \\ \xi(0) = \xi \end{cases}$$

On trouve alors $x(t) = x$, $\xi_i(t) = \xi_i e^t$. □

Proposition 1.29. *Sous les mêmes hypothèses que 1.27, soit g un symplectomorphisme de M préservant α, alors il existe un difféomorphisme f de X dont g est le relevé.*

Démonstration. Pour $g(x,\xi) = (y,\eta)$. Par le 1.26 et le 1.27, on a $g(x, e^t\xi) = g \circ \exp(tV)(x,\xi) = \exp(tV) \circ g(x,\xi) = \exp(tV)(y,\eta) = (y, e^t\eta)$.

Comme $t \to e^t$ parcours $\mathbb{R}_+^*$, on a pour tout λ dans $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$g(x,\xi) = (y,\eta) \Rightarrow g(x,\lambda\xi) = (y,\lambda\eta)$$

Par continuité des fonctions composées, on étend cette implication au cas $\lambda = 0$, on déduit alors que sur chaque demi-droites de T_x^*X, $v \to \pi(g(x,v))$ prend les même valeurs, et comme ces valeurs sont toutes les mêmes en $v = 0$, on déduit que cette application est constante, donc g préserve les fibres cotangentes.

Puisque g est constante le long de chaque espace cotangent, on peut poser un difféomorphisme f de X tel que $g(x,\xi) = (f(x),\eta)$, soit $\pi \circ g = f \circ \pi$. Montrons alors que $f_\# = g$.

On pose $A_x : T_x^*X \to T_x^*X$ les fonctions telles que $g(x,\xi) = (f(x), A_x(\xi))$. Il faut montrer que $A_x(\xi) = (d_x f^{-1})^*\xi$.

En dérivant $\pi \circ g = f \circ \pi$, on obtient $d_{g(p)}\pi \circ d_p g = d_x f \circ d_p \pi$. Soit $p = (x,\xi)$ dans M, V dans T_pM, $v = d_p\pi(V)$. On pose $g(x,\xi) = (f(x),\eta)$, on a :

$$\begin{aligned} &\xi(v) = \xi(d_p\pi(V)) = \alpha_p(V) = ((d_pg)^*\alpha_{g(p)})(V) = \alpha_{g(p)}(d_pg(V)) \\ &= \eta(d_{g(p)}\pi \circ d_pg(V)) = \eta(d_xf \circ d_p\pi(V)) = \eta(d_xf(v)) \\ &\Leftrightarrow \eta = \xi \circ (d_{f(x)}f^{-1})^*\xi \end{aligned}$$

On peut conclure. □

Donc les symplectomorphismes relevés sont exactement ceux qui préservent la forme 1-forme de Liouville.

1.4 Les différentes sous-variétés

Définition 1.30. *Soit (M, ω) une variété symplectique. Une sous-variété N de M est dite lagrangienne (resp. symplectique, isotrope, coïsotrope) si pour tout x dans N, T_xN est une sous-espace vectoriel lagrangien (resp. symplectique, isotrope, coïsotrope) de (T_xM, ω_x).*

On sera surtout intéressé par les sous-variétés lagrangiennes.

si on note $i : N \to M$ l'inclusion canonique, demander à N d'être lagrangienne revient simplement à avoir $i^*\omega = 0$ et $\dim N = \frac{1}{2}\dim M$.

On va chercher à caractériser dans certains cas les sous-variétés lagrangiennes.

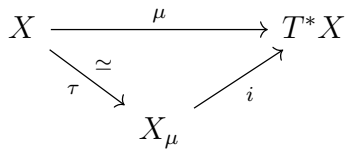
Définition 1.31. *Soit X une variété différentielle, on appelle section de T^*X la sous-variété de dimension n image d X par une 1-forme différentielle :*

$$X_\mu \coloneqq \{(x, \mu_x) \mid x \in X, \mu_x \in T_x^*X\} = \mu(X)$$

En particulier lorsque μ est nulle on parle de section nulle.

Proposition 1.32. *Soit X_μ une section de T^*X, $X\mu$ est une sous-variété lagrangienne de T^*X si et seulement si μ est fermée.*

Démonstration. On note τ l'application "restriction à son image" de μ, $\tau : X \to X_\mu$, $\tau = \mu$, de sorte que τ soit un difféomorphisme.



On a :

$$\begin{aligned}
X_\mu \text{ est lagrangien} &\Leftrightarrow i^*\omega = 0 \\
&\Leftrightarrow i^*(-d\alpha) = 0 \\
&\Leftrightarrow \tau^* i^*(d\alpha) = 0 \text{ car } \tau \text{ est un difféomorphisme} \\
&\Leftrightarrow (i \circ \tau)^* d\alpha = 0 \\
&\Leftrightarrow d(i \circ \tau)^* \alpha = 0 \\
&\Leftrightarrow 0 = d\mu^*\alpha = d\mu \text{ par la propriété caractéristique de } \alpha \\
&\Leftrightarrow \mu \text{ est fermée}
\end{aligned}$$

□

On a donc une correspondance entre les sections de T^*X et les 1-formes fermées de X. En particulier lorsque $H^1_{dR}(X) = 0$, toutes les 1-formes fermées sont exactes, donc il existe une fonction lisse f associée à chaque section, on appelle un f la fonction génératrice du sous-espace lagrangien X_{df}. Deux fonctions génèrent alors le même espace si et seulement si elles ne diffèrent que d'une constante.

Il existe bien sur énormément de sous-variétés lagrangiennes n'étant pas l'image d' 1-forme, par exemple les fibres cotangentes.

On utilise maintenant la notion de sous-variété lagrangienne pour caractériser les symplectomorphismes.

Soit (M_1, ω_1), (M_2, ω_2) deux variétés symplectiques, on appelle variété symplectique produit $(M_1 \times M_2, \omega)$ l'espace produit munie de $\omega \coloneqq (\mathrm{pr}_1)^*\omega_1 + (\mathrm{pr}_2)^*\omega_2$.

C'est une variété symplectique de dimension la somme des dimensions des deux composantes.

Démonstration. Le caractère de variété différentielle est classique.

On a $d\omega = (\mathrm{pr}_1)^*d\omega_1 + (\mathrm{pr}_2)^*d\omega_2 = (\mathrm{pr}_1)^*0 + (\mathrm{pr}_2)^*0 = 0$, et $\omega^{2n} = \binom{2n}{n}((\mathrm{pr}_1)^*\omega_1)^n \wedge ((\mathrm{pr}_2)^*\omega_2)^n \neq 0$

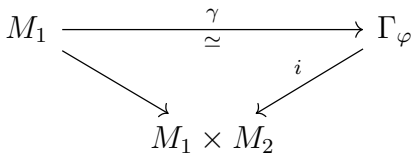
ω est donc bien une forme symplectique. □

De manière générale, pour tout coefficients réels non nuls λ_1, λ_2, $\lambda_1(\mathrm{pr}_1)^*\omega_1 + \lambda_2(\mathrm{pr}_2)^*\omega_2$ est une forme symplectique, le calculs est le même avec un produit de coefficients non nul en plus. Dans le cas où les coefficients sont 1 et -1, on parle de *forme produit tordue* (*twisted product form*) et on note $\tilde{\omega}$.

On s'intéresse donc a un difféomorphisme φ entre M_1 et M_2 (de même dimension), son graphe $\Gamma_\varphi \coloneqq \{(p, \varphi(p))|\ p \in M_1\}$ est une sous-variété de $M_1 \times M_2$ (l'inclusion canonique est bien un plongement). On a enfin le résultat de caractérisation suivant.

Proposition 1.33. *Un difféomorphisme entre variété symplectique (M_1, ω_1) et (M_2, ω_2) est un symplectomorphisme si et seulement si son graphe Γ_φ est une sous-variété lagrangienne de $(M_1 \times M_2, \tilde{\omega})$.*

Démonstration. On note γ la restriction de φ a son image et i, l'inclusion de Γ_φ dans $M_1 \times M_2$.



On a :

$$\begin{aligned}
\Gamma_\varphi \text{ sous-variété lagrangienne } &\Leftrightarrow i^*\tilde{\omega} = 0 \\
&\Leftrightarrow \gamma^* i^* \tilde{\omega} = 0 \text{ car } \gamma\text{est un difféomorphisme} \\
&\Leftrightarrow (i \circ \gamma)^*((\mathrm{pr}_1)^*\omega_1 - (\mathrm{pr}_2^*)\omega_2) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\mathrm{pr}_1 \circ i \circ \gamma)^*\omega_1 - (\mathrm{pr}_2 \circ i \circ \gamma)^*\omega_2 = 0
\end{aligned}$$

Or $\mathrm{pr}_1 \circ i \circ \gamma = Id_{M_1}$, et $\mathrm{pr}_2 \circ i \circ \gamma = \varphi$, on trouve finalement $0 = \omega_1 - \varphi^*\omega_2$ soit $i^*\tilde{\omega} \Leftrightarrow \varphi^*\omega_2 = \omega_1$. □

1.5 L'astuce de Moser, le théorème de Darboux et quelques applications

Proposition 1.34. *Soit une variété quelconque M, α_t une famille lisse selon le temps de formes différentielles, $t \to X$ un champ de vecteur et ϕ son flot. Pour les $t \in \mathbb{R}$ pour lesquels sont définies les formes différentielles et le flot, on a :*

$$\tfrac{d}{dt}(\phi_t^*\ \alpha_t) = \phi_t^* \mathcal{L}_X \alpha_t + \phi_t^* \tfrac{d\alpha_t}{dt}$$

Démonstration. On utilise la règle de la chaîne :

$$\frac{d}{dt}(\phi_t^*\ \alpha_t) = \frac{\partial}{\partial u}(\phi_u^*\ \alpha_t)\big|_{u=t} + \frac{\partial}{\partial s}(\phi_t^*\ \alpha_s)\big|_{s=t}$$

D'une part :

$$\frac{\partial}{\partial u}(\phi_u^*\ \alpha_t)\big|_{u=t} = \lim_{\epsilon\to\ 0}\frac{1}{\epsilon}(\phi_{u+\epsilon}^*\ \alpha_t - \phi_u^*\ \alpha_t) = \lim_{\epsilon\to\ 0}\frac{1}{\epsilon}((\phi_\epsilon\circ\phi_u)^*\ \alpha_t - \phi_u^*\ \alpha_t) =$$
$$\lim_{\epsilon\to\ 0}\frac{1}{\epsilon}((\phi_u)^*(\phi_\epsilon)^*\ \alpha_t - \phi_u^*\ \alpha_t) = \phi_u^*(\lim_{\epsilon\to\ 0}\frac{1}{\epsilon}(\phi_\epsilon^*\ \alpha_t - \alpha_t)) = \phi_u^*\mathcal{L}_X\alpha_t$$

par définition de la dérivé de Lie.
D'autre part :

$$\frac{\partial}{\partial s}(\phi_t^*\ \alpha_s) = \lim_{\epsilon\to\ 0}\frac{1}{\epsilon}(\phi_t^*\alpha_{s+\epsilon} - \phi_t^*\alpha_s) = \phi_t^*\lim_{\epsilon\to\ 0}\frac{1}{\epsilon}(\alpha_{s+\epsilon} - \alpha_s) = \phi_t^*\frac{d\alpha_s}{ds},$$

puis appliquée en $t = s$, on trouve bien $\phi_t^*\frac{d\alpha_t}{dt}$.

□

Nous allons maintenant donner une première version du fameux *Moser's trick*, que nous traduirons par la suite en astuce de Moser.

Proposition 1.35. *Soit $\{\omega_t\}_{t\in[0,1]}$ une famille lisse de k-forme sur M une variété compacte, si l'EDO :*

$$\frac{d\omega_t}{dt} + \mathcal{L}_{X_t}\omega_t = 0$$

admet une solution $\{X_t\}$, un champ de vecteur dépendant du temps (lisse en t), alors il existe $\{\psi_t\}_{t\in[0,1]}$ une famille de difféomorphisme sur M tel que $\psi_t^*\omega_t = \omega_0$, $\psi_0 = \mathrm{Id}_M$. En particulier pour $\psi := \psi_1$, $\psi^*\omega_1 = \omega_0$

Démonstration. L'idée est de poser ψ comme le flot du champ de vecteur X. On notera ici que comme le champ de vecteur dépend du temps, son flot prend deux variables de temps , ici on utilise la compacité de la variété M pour justifier que le flot est bien défini pour tout t dans $[0, 1]$. On choisit toujours $u = 0$ pour la deuxième variable de temps de ψ, donc on notera simplement ψ_t.

On a $\frac{d\psi_t}{dt} = X_t(\psi_t)$ pour tout t dans $[0, 1]$. Par la proposition 1.35 :

$$\frac{d}{dt}(\psi_t^*\ \omega_t) = \psi_t^*(\mathcal{L}_X\omega_t + \frac{d\omega_t}{dt})$$

Par hypothèse, on peut trouver X_t tel que $\mathcal{L}_X\omega_t + \frac{d\omega_t}{dt} = 0$, le flot associé vérifie alors $\psi_t^*\omega_t =$ constante $= \psi_0^*\omega_0 = \omega_0$, et est bien défini sur $[0, 1]$, on choisit $t = 1$ pour conclure. □

On remarque ici qu'on a utilisé la compacité de la variété M pour justifier la bonne définition du flot associé au champ de vecteur. Cette condition est suffisante mais pas nécessaire car, derrière le formalisme de la géométrie différentielle, on utilise en fait le théorème de Cauchy-Lipschitz. Dans certaines propositions à venir, nous serons amenés à réutiliser cette astuce de Moser, mais dans des cas non compact, où il faudra alors plus de travail pour justifier l'existence du flot au centre du résultat.

Moser avait initialement mis en place son astuce pour démontrer un résultat reliant l'équivalence de deux formes volumes sur une même variété avec les volumes totaux de la variété associés à chaque forme. Ce qui explique alors la restriction au cas compact.

Proposition 1.36. *Soit α_0, α_1 deux formes volumes sur M compacte, il existe un difféomorphisme ψ de M dans lui même tel que $\psi^*\alpha_1 = \alpha_0$ si et seulement si $\int_M \alpha_0 = \int_M \alpha_1$*

Démonstration. Si un tel ψ existe,

$$\int_M \alpha_0 = \int_M \psi^*\alpha_1 = \int_{\psi(M)} \alpha_1 = \int_M \alpha_1$$

Réciproquement, si $\int_M \alpha_0 - \alpha_1 = 0$, comme $\int_M : H^n_{dR}(M) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$, on déduit que $[\alpha_1 - \alpha_0] = 0 \in H^n_{dR}(M)$. Donc il existe une $n-1$-forme β tel que $\alpha_1 - \alpha_0 = \beta$. On pose $\alpha_t \coloneqq (1-t)\alpha_0 + t\alpha_1 = \alpha_0 + td\beta$. On applique l'astuce de Moser : pour trouver ψ, il suffit de résoudre

$$\frac{d\alpha_t}{dt} + \mathcal{L}_{X_t}\alpha_t = 0$$

Ici cette équation se simplifie en utilisant la formule magique de Cartan :

$$0 = d\beta \ + d\iota_{X_t}\alpha_t \ + \iota_{X_t}d\alpha_t = d(\beta \ + \iota_{X_t}\alpha_t)$$

Puisque $d\alpha_t = 0$ car α_t est une n-forme. Or

$$\beta \ + \iota_{X_t}\alpha_t = 0 \implies d(\beta + \iota_{X_t}\alpha_t) = 0.$$

Donc il suffit de résoudre cette dernière équation. Pour t fixé, α_t forme volume et β $n-1$-forme, puisque

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \Lambda^{n-1}T^*M \\ X_t & \longmapsto & \iota_{X_t}\alpha_t \end{array}$$

est un isomorphisme, on peut trouver X_t une solution à l'équation précédente. En écrivant l'équation sous forme matricielle, on trouve que les valeurs de X_t s'écrivent de manière lisse en fonction de celle de β et α_t, donc par composition $t \to X_t$ est bien lisse aussi. On à résolu notre équation, donc ψ existe. □

Proposition 1.37. *Soit (M_1, ω_1), (M_2, ω_2) deux variétés symplectiques fermées compactes de dimension 2 (automatiquement orientées par les formes symplectiques). Elles sont symplectomorphes si et seulement si elles ont même genre et même volume symplectique, ie. $\int_{M_1} \omega_1 = \int_{M_2} \omega_2$.*

Démonstration. Par la classification des surfaces compactes orientées sans bords, pour qu'il existe un difféomorphisme entre M_1 et M_2, si et seulement si elles ont même genre.

Si ϕ est un difféomorphisme entre M_1 et M_2, pour qu'il existe ψ un symplectomorphisme entre $(\phi(M_1), \phi^*\omega) = (M_2, \phi^*\omega)$ et (M_2, ω_2), par la proposition précédente, il faut et suffit qu'elle ait la même aire pour ω_2 et $\phi^*\omega_1$.

Dans ce cas on trouve alors $\psi^*\phi^*\omega_1 = \omega_2$, on conclue en posant $\Phi = \phi \circ \psi$. □

On remarque que s'il existait des classifications de variété en dimension supérieure à difféomorphisme près, on trouverait immédiatement par le même raisonnement une classification à symplectomorphisme près.

L'astuce de Moser est aujourd'hui beaucoup utilisé en géométrie symplectique, notamment dans la démonstration de théorèmes de voisinages simplifiant grandement la démonstration du théorème de Darboux, ou dans des théorèmes analysant la stabilité des structures symplectiques sur une même variété.

Proposition 1.38. *Soit M variété compacte, $\omega_t = \omega_0 \ + d\beta_t$ une famille lisse de formes symplectiques. Il existe alors $\{\phi_t\}_t$ une isotopie telle que $\phi_t^*\omega_t = \omega_0$ pour tout t.*

Démonstration. Par l'astuce de Moser, $\{\phi_t\}_t$ existe si et seulement si

$$\frac{d}{dt}(\omega_0 \ + d\beta_t) \ + \mathcal{L}_{X_t}(\omega_0 \ + d\beta_t) = 0$$

admet une solution, ce qui équivaut à :

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}(d\beta_t) \ + d\iota_{X_t}(\omega_0 \ + d\beta_t) + \iota_{X_t} d(\omega_0 + d\beta_t) = 0 \\ \Leftrightarrow \ d(\tfrac{d\beta_t}{dt}) \ + d\iota_{X_t}(\omega_0 \ + d\beta_t) = 0 \\ \Leftrightarrow \ d(\tfrac{d\beta_t}{dt} \ + \iota_{X_t}\omega_t) = 0 \\ \Leftarrow \ \tfrac{d\beta_t}{dt} \ + \iota_{X_t}\omega_t = 0\end{gathered}$$

Et cette équation se résout pour tout t par non dégénérescence de ω_t, puis par le même argument que précédemment, la solution est bien lisse en t. □

Pour deux formes symplectiques dans la même classe de cohomologie, en les reliant par $t \to d\beta_t$, on montre qu'elles définissent la même structure symplectique.

On utilise maintenant l'astuce de Moser pour prouver un théorème qui donnera comme corollaire presque directement le théorème de Darboux.

Théorème 1.39. *Soit M une variété (non nécessairement compacte), ω_0 et ω_1 deux formes symplectiques sur M, $a \in M$ tel que $\omega_0(a) = \omega_1(a)$. Il existe des voisinages U_0 et U_1 de a dans M et un difféomorphisme ψ entre eux tel que $\psi(a) = a$ et $\psi^*\omega_1 = \omega_0$.*

Démonstration. On pose pour tout t dans $\mathbb{R}$, $\omega_t \coloneqq \omega_0 \ + t(\omega_1 - \omega_0)$. Par fermeture des formes symplectiques, $d\omega_t = 0$ et $\omega_t(a) = \omega_0(a)$.

Par le lemme de Poincaré, sur un voisinage V de a, il existe une 1-forme β tel que $\omega_1 - \omega_0 = d\beta$, et quitte à soustraire df tel que $d_a f = \beta(a)$, on peut supposer que $\beta(a) = 0$.

Pour tout t, $\omega_t(a) = \omega_0(a)$ qui est non dégénérée, donc $W \coloneqq \{(t, x) \in \mathbb{R} \times V$ tel que $\omega_t(x)$ est non dégénérée $\}$ est et ouvert non vide car contient $\mathbb{R} \times \{a\}$. Soit pour tout $(t, x) \in W$, on note $X_t(a)$ l'unique vecteur solution de :

$$\iota_{X_t}\omega_t\big|_x = -\beta\big|_x.$$

X est un champs de vecteur dépendant du temps. Soit ϕ son flot.

Soit $D_{(t,0)}$ l'ensemble des x dans V tel que $(t, 0, x)$ soit dans l'ensemble de définition de Φ, c'est à dire pour la condition initiale en temps de l'EDO du flot $u = 0$. On veut faire que les t aillent jusqu'à 1 pour réussir à relier ω_0 et ω_1 comme dans la démonstration de l'astuce de Moser version compacte.

Comme pour tout t dans $\mathbb{R}$, $X_t(a) = 0$, a est dans tous les $D_{(t,0)}$. Par les conditions initiales définissant le flot, $\phi_t^0(a) = a$ pour tout t. On utilise alors 1.34 :

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}((\phi_u^0)^*\omega_u)\big|_{u=t} = (\phi_t^0)^*(\mathcal{L}_{X_t}\omega_t + \frac{d\omega_t}{dt}) \\ &= (\phi_t^0)^*(\iota_{X_t}d\omega_t + d\iota_{X_t}\omega_t + \frac{d\omega_t}{dt}) = (\phi_t^0)^*(d\iota_{X_t}\omega_t + \frac{d\omega_t}{dt}) \\ &= (\phi_t^0)^*(-d\beta + \frac{d\omega_t}{dt}) = (\phi_t^0)^*(\omega_0 - \omega_1 + \frac{d\omega_t}{dt}) \\ &= (\phi_t^0)^*(\omega_0 - \omega_1 - \omega_0 + \omega_1) = 0\end{aligned}$$

Donc $(\phi_u^0)^*\omega_u = (\phi_0^0)^*\omega_0 = \omega_0$, en particulier pour $t = 1$, on peut poser $\psi \coloneqq \phi_1^0$, $U_0 \coloneqq D_{(1,0)}$, $U_1 \coloneqq \phi_1^0(D_{(1,0)})$. On a vu que $\psi(a) = a$. U_1 est bien aussi un voisinage de a, on peut alors conclure. □

Théorème 1.40 (Théorème de Darboux)**.** *Pour tout a dans M une variété symplectique munie de ω et de dimension $2n$, il existe une carte $(U, x^1, \dots, x^{2n})$ où $\omega = \sum_{i=1}^{n} dx^{n+i} \wedge dx^i$.*

Démonstration. T_aM est un espace vectoriel symplectique, soit $(e_1, \dots, e_{2n}$ une base canonique : $\omega_a = \sum e^{n+i} \wedge e^i$. Soit $(\epsilon^1, \dots, \epsilon^{2n})$ sa base duale, donc base de T_a^*M.

Soit y^i $2n$ fonctions numériques lisses sur U, telles que $y^i(a) = 0$, $d_a y^i = \epsilon^i$. Les $(d_a y^i)_i$ sont linéairement indépendant, donc pour tout les x sur un petit voisinage de a, les $(d_x y^i)_i$ vont aussi être linéairement indépendant (par continuité de $x \to \det((d_x y^i)_i)$ et $\det((d_a y^i)_i) \neq 0$). Quitte à renommer U, on peut supposer que sur tout U, ces fonctions sont linéairement indépendante.

On pose $\omega_0 = \sum dy^{n+i} \wedge dy^i$. C'est bien une forme symplectique sur U, et $\omega_0\big|_a = \sum \epsilon^{n+i} \wedge \epsilon^i$.

On pose $\omega_1 = \omega\big|_U$, on a en particulier $\omega_0\big|_a = \sum \epsilon^{n+i} \wedge \epsilon^i = \omega_1\big|_a$.

On peut alors appliquer 1.39 : il existe deux voisinages U_0, U_1 de a dans U et $\Psi : U_0 \xrightarrow{\sim} U_1$, $\Psi(a) = a$, $\Psi^*\omega_1 = \omega_0$, on a alors :

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= (\Psi^{-1})^* \sum dy^{n+i} \wedge d^i = \sum (\Psi^{-1})^* (dy^{n+i} \wedge d^i) \\
&= \sum (\Psi^{-1})^* dy^{n+i} \wedge (\Psi^{-1})^* d^i \\
&= \sum d(\Psi^{-1})^* y^{n+i} \wedge d(\Psi^{-1})^* y^i \\
&= \sum dy^{n+i}(\Psi^{-1}) \wedge dy^i(\Psi^{-1})
\end{aligned}$$

Il suffit alors de poser $x^i \coloneqq y^i(\Psi^{-1})$, ce qui nous donne bien une carte en a par les propriétés de Ψ, où ω est de la forme voulue. □

Ce résultat se traduit par le fait que localement, toute les variétés symplectiques de même dimension sont identique, ce qui est très différent du cas de la géométrie riemannienne, où la courbure est un invariant local : deux variétés riemannienne n'ayant pas la même courbure en un point ne peuvent pas être isométrique autour de ce point.

La géométrie symplectique n'a donc d'intérêt que globalement, ou semi-globalement, comme nous allons le voir avec les théorèmes de Weinstein.

1.6 Autour des théorèmes de Weinstein

Les théorèmes de Weinstein généralisent la démonstration du théorèmes de Darboux et ont leur lots d'applications. On en présente ici quelque uns.

Définition 1.41 (Espace et fibrés conormaux)**.** *Soit X une sous-variété de M, de dimensions respectives k et n. Par les conventions usuelles on pose pour x dans X, $T_xX \subset T_xM$ comme espaces vectoriels, on définit alors l'espace conormal à T_xX, $N_xX \coloneqq T_xM/T_xX$, et le fibré conormal de X comme $NX \coloneqq \{(x, v)\ , x \in X\ , v \in N_xX\}$*

Par l'algèbre linéaire élémentaire on a que N_xX est un espace vectoriel de dimension $n - k$

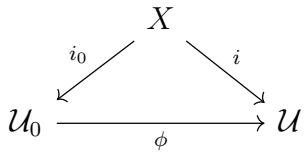
Proposition 1.42. *Le fibré conormal (NX, π, X) a une structure de fibré vectoriel de rang $n - k$.*

On notera i_0 la section nulle de $NX \to X$, et par abus de notation on notera encore X la sous-variété image incluse dans NX.

Définition 1.43. *Soit $\mathcal{U}_0$ un voisinage de la section nulle X dans NX. On dit que c'est un voisinage convexe de X dans NX si pour tout x dans X, $\mathcal{U}_0 \cap N_xX$ est convexe dans N_xX.*

Théorème 1.44 (Théorème du voisinage tubulaire)**.** *Soit X une sous-variété de dimension k d'une variété M de dimension n, i_0 la section nulle et i l'inclusion de X dans M.*

Il existe $\mathcal{U}_0$ un voisinage convexe de X dans NX, $\mathcal{U}$ un voisinage de X dans M et un difféomorphisme ϕ de $\mathcal{U}_0$ dans $\mathcal{U}$ tel que le diagramme suivant commute.



Dans la suite on appellera voisinage tubulaire un voisinage $\mathcal{U}$ tel que les autres éléments du théorème existent (en particulier $\mathcal{U}_0$ en est aussi un pour l'identité).

Proposition 1.45 (Lemme d'homotopie et application)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un voisinage tubulaire de X inclue par i dans M, ω une l-forme différentielle sur $\mathcal{U}$ tel que $i^*\omega = 0$.*

Alors ω est exacte sur $\mathcal{U}$, et pour $\omega = d\mu$, on peut choisir que pour tout x dans X, $\mu_x = 0$.

Démonstration. On commence par démontrer le résultat dans le cas de $\mathcal{U}_0$ dans NX et i_0.

On pose pour tout t dans $[0,1]$, $\rho_t : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}_0$; $(x,v) \to (x,tv)$. ρ_t est bien défini car $\mathcal{U}_0$ est convexe.

$\rho_1 = Id_{\mathcal{U}_0}$, $\rho_0 = i_0 \circ \pi$. ρ est une homotopie de ρ_0 à ρ_1, elle "fixe" X : pour tout t dans $[0,1]$, $(x,0)$, $\rho_t(x,0) = (x,0)$. π est une rétraction de $\mathcal{U}_0$ dans X.

Un opérateur d'homotopie entre ρ_0 et ρ_1 est une application linéaire $Q : \Omega^d(\mathcal{U}_0) \to \Omega^d(\mathcal{U}_0)$, vérifiant $Id - \rho_0^* = dQ + Qd$. Si $d\omega = 0$, $i_0^*\omega = 0$, on trouve que $\omega = dQ\omega$. Il suffit alors de poser $\mu = Q\omega$ pour conclure.

Trouvons alors un tel opérateur Q :

On pose $Q : \omega \to \int_0^1 \rho_t^*(\iota_{X_t}\omega)dt$, on a

$$Qd\omega + dQ\omega = \int_0^1 \rho_t^*(\iota_{X_t}d\omega)dt + d\int_0^1 \rho_t^*(\iota_{X_t}\omega)dt = \int_0^1 \rho_t^*(\iota_{X_t}d\omega + d\iota_{X_t}\omega)dt = \int_0^1 \rho_t^*(\mathcal{L}_{X_t}\omega)dt$$

Et puisque $\frac{d}{dt}\rho_t^*\omega = \rho_t^*(\mathcal{L}_{X_t}\omega)$, car ω est indépendant du temps. Donc

$$Qd\omega + dQ\omega = \int_0^1 \frac{d}{dt}\rho_t^*\omega = \rho_1^*\omega - \rho_0^*\omega = Id\omega - \rho_0^*\omega$$

De plus ici, comme pour tout $(x,0)$ dans $\mathcal{U}_0$, $\rho_t(x,0) = (x,0)$ est constante en t, on trouve par argument d'EDO que X_t est nul pour tout t et $(x,0)$, donc $\mu_x = Q\omega_x = \int_0^1 \rho_t^*(\iota_{X_t}\omega)_x dt = \int_0^1 \rho_t^*(\iota_0\omega)_x dt = 0$.

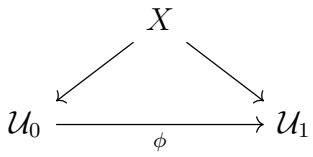
On a donc fait le cas $\mathcal{U}_0$. Pour se ramener à $\mathcal{U}$: soit ω une forme différentielle sur $\mathcal{U}$ et $i^*\omega = 0$, on a que $\phi^*\omega$ est une forme différentielle sur $\mathcal{U}_0$. On a $i_0^*\phi^*\omega = (\phi \circ i_0)^*\omega = i^*\omega = 0$. On applique alors ce que l'on vient de montrer à $\phi^*\omega$: $\phi^*\omega = d\mu$ et pour tout x dans X, $\mu_x = 0$.

On a alors $\omega = (\phi^{-1})^*d\mu = d(\phi^{-1})^*\mu$ et par commutativité du diagramme dans on trouve que pour tout x dans X : $(\phi^{-1})^*\mu_x = 0$. □

Le théorème du voisinage tubulaire permet de construire des voisinages agréables ou les flots se définissent bien, ce qui permet de montrer de nombreuses généralisations du théorème de Darboux.

Théorème 1.46 (Théorème de Moser relatif)**.** *Soit X une sous-variété compacte de M. On note i l'inclusion de X dans M. Soit ω_0 et ω_1 deux formes symplectiques sur M tel que pour tout p dans X, $\omega_0|_p = \omega_1|_p$.*

Alors il existe deux voisinages $\mathcal{U}_0$ et $\mathcal{U}_1$ de X dans M et un difféomorphisme $\phi : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}_1$ tel que :



commute, et $\phi^*\omega_1 = \omega_0$

On remarquera que la condition "$\omega_0|_p = \omega_1|_p$ pour tout p dans X", est plus forte que que la condition "$i^*\omega_0 = i^*\omega_1$", puisque l'égalité doit tenir pour tous les vecteurs tangents dans T_pM est pas seulement T_pX.

Démonstration. On choisit un voisinage tubulaire $\mathcal{U}$ de X, $\omega_0|_p - \omega_1|_p = 0$ implique $i^*(\omega_0 - \omega_1) = 0$, et $d(\omega_0 - \omega_1) = 0$ car ce sont des formes symplectiques. On peut alors appliquer : il existe μ une forme différentielle sur $\mathcal{U}$ tel que $\omega_1 - \omega_0 = d\mu$ et $\mu_p = 0$ pour tout p dans X.

Soit pour tout t dans [0,1], $\omega_t \coloneqq (1-t)\omega_0 + t\omega_1 = \omega_0 + td\mu$. C'est une famille de formes fermées sur $\mathcal{U}$. ω_0 est symplectique donc non dégénérée sur chaque espace tangent. Puisque $p \to det(\tilde{\omega}|_p)$ est continue, proche de ω_0, les deux formes restent non dégénérées. Donc quitte à restreindre $\mathcal{U}$, on peut supposer les ω_t sont non dégénérées, puis symplectique.

On résout l'équation de l'astuce de Moser : par non dégénérescence, il existe un unique champ de vecteur sur $\mathcal{U}$ tel que $\iota_{X_t}\omega_t = -\mu$, et comme pour tout p dans X, $\mu_x = 0$, on déduit que $X_t(p) = 0$

Puisque $X_t(X) = 0$, le flot de (X_t), ψ est au moins défini pour tout t dans [0,1] au temps $u = 0$, puis donc sur un petit voisinage de $(t, 0, u)$ dans $[0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathcal{U}$.

On a donc que le flot est définit sur $[0, 1] \times \mathbb{R} \times X$. Donc quitte à encore restreindre $\mathcal{U}$, on peut supposer que ψ est définit sur tout $[0, 1] \times [0, 1] \times \mathcal{U}$. Sur cet ensemble on donc :

$$
\begin{aligned}
\iota_{X_t}\omega_t = -\mu \implies & d\iota_{X_t}\omega_t = -d\mu \\
& \Leftrightarrow \mathcal{L}_{X_t}\omega_t - \iota_{X_t}d\omega_t = -d\mu = \omega_0 - \omega_1 = -\frac{d\omega_t}{dt} \\
& \Leftrightarrow \mathcal{L}_{X_t}\omega_t + \frac{d\omega_t}{dt} = 0 \\
& \Leftrightarrow \psi^*_{(t,0)}(\mathcal{L}_{X_t}\omega_t + \frac{d\omega_t}{dt}) = 0 \\
& \frac{d}{du}(\psi^*_{(u,0)}\omega_u)|_{u=t} = 0 \\
& \forall u \in [0,1],\ \psi^*_{(u,0)}\omega_u = constante = Id^*\omega_0 = \omega_0.
\end{aligned}
$$

En particulier, pour $u = 1$, $\phi \coloneqq \psi_{(1,0)}$, $\phi^*\omega_1 = \omega_0$. Comme $X_t(X) = 0$, $\phi_t(X) = Id_X$, on pose enfin $\mathcal{U}_0 \coloneqq \mathcal{U}$, $\mathcal{U}_1 \coloneqq \phi(\mathcal{U})$, et par $\phi_t|_X = Id_X$, on obtient le diagramme commutatif. □

On retrouve le théorème de Darboux en posant $X = p$.

Pour s'attaquer aux théorèmes de Weinstein, on doit commencer par faire un peu d'algèbre linéaire.

Proposition 1.47. *Soit (V, Ω) un espace vectoriel symplectique, de dimension $2n$, et U un sous-espace vectoriel lagrangien. Soit W un sous-espace complémentaire de U, pas nécessairement lagrangien.*

On peut alors construire canoniquement un supplémentaire lagrangien de U à partir de W.

Démonstration. Soit $\Omega' : U \times W \to \mathbb{R}$, $\Omega' = \Omega$ sur $U \times W$. On a alors $\tilde{\Omega}' : U \to W^*$.
$\tilde{\Omega}'$ est bijective :

$\tilde{\Omega}'(x) = 0 \Longrightarrow \forall y \in W,\ \Omega'(x, y) = 0$. Par non dégénérescence de Ω, $x = 0$, donc $\ker(\tilde{\Omega}') = \{0\}$. De plus, $\dim \operatorname{Im} \tilde{\Omega}' = \dim U - \dim(\ker(\tilde{\Omega}')) = n - 0 = \dim W^*$. Donc $\tilde{\Omega}'$ est aussi surjective, puis un isomorphisme.

On va chercher un complémentaire de la forme $W' := \{w + Aw,\ w \in W\}$
pour $A : W \to U$ linéaire.

Pour que W' soit lagrangien, il faut que :

$$\begin{aligned}
&\forall w_1, w_2 \in W,\ \Omega(w_1 + Aw_1, w_2 + Aw_2) = 0 \\
&\Leftrightarrow 0 = \Omega(w_1, w_2) + \Omega(Aw_1, w_2) + \Omega(w_1, Aw_2) + \Omega(Aw_1, Aw_2) = \Omega(w_1, w_2) + \Omega(Aw_1, w_2) + \Omega(w_1, Aw_2) \\
&\Leftrightarrow \Omega(w_1, w_2) = \Omega(Aw_2, w_1) - \Omega(Aw_1, w_2) = \tilde{\Omega}'(Aw_2)(w_1) - \tilde{\Omega}'(Aw_1)(w_2)
\end{aligned}$$

Car $Aw_i \in U$ et $w_i \in W$.

Si on pose $A' = \tilde{\Omega}' \circ A : W \to W^*$, on cherche alors un A' tel que pour tout w_1, w_2 dans W, $\Omega(w_1, w_2) = A'(w_2)(w_1) - A'(w_1)(w_2)$.

On peut poser $A'(w) = \frac{-1}{2}\Omega(w, .)$:

$$A'(w_2)(w_1) - A'(w_1)(w_2) = \tfrac{-1}{2}\Omega(w_2, w_1) + \tfrac{1}{2}\Omega(w_1, w_2) = \Omega(w_1, w_2)$$

Donc $W' := \{w + (\tilde{\Omega}')^{-1} \circ (\frac{-1}{2}\tilde{\Omega})(w),\ w \in W\}$ est lagrangien.

Est-il encore supplémentaire de U ? Soit x dans $U \cap W'$, si A est inversible : $x = y + Ay$ avec y dans W, puis $Ay = x - y$, et comme Ay et x sont dans U, et y est dans W, par somme directe on trouve que $y = 0$, puis $Ay = 0$, soit $x = y = 0$.

Donc $U \cap W' = \{0\}$. Et pour tout v dans V, comme $U \oplus W = V$, on peut écrire $v = u + w = u - Aw + Aw + w$. $u - Aw$ est dans U, $Aw + w$ est dans W, donc $W' + U = V$

Il suffit donc pour conclure de montrer que le A trouvé est bien inversible, ce qui vient du fait que Ω est non dégénérée, et $\tilde{\Omega}'$ est inversible. □

Proposition 1.48. *Soit V un espace vectoriel de dimension $2n$ et Ω_0, Ω_1 deux formes symplectiques sur V. Soit U un sous-espace vectoriel lagrangien pour Ω_0 et Ω_1. Soit W un complémentaire de U dans V.*

On peut alors construire à partir de W un isomorphisme $L : V \to V$ tel que $L|_U = Id|_U$ et $L^*\Omega_1 = \Omega_0$

Démonstration. Par la proposition précédente, à partir de W on construit W_0 et W_1 des sous-espaces lagrangiens pour respectivement Ω_0 et Ω_1, complémentaires de U et V.

Soit :

$$\Omega_0' : W_0 \times U \to \mathbb{R} \text{ et } \tilde{\Omega}_0' : W_0 \to \times U$$
$$\Omega_1' : W_1 \times U \to \mathbb{R} \text{ et } \tilde{\Omega}_1' : W_1 \to \times U$$

On peut alors poser $B = (\tilde{\Omega}_1')^{-1} \circ (\tilde{\Omega}_0') : W_0 \to W_1$.

$$\begin{array}{ccc} W_0 & \xrightarrow{\tilde{\Omega}_0'} & U^* \\ {\scriptstyle B}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Id|_{U^*}} \\ W_1 & \xrightarrow[\tilde{\Omega}_1']{} & U^* \end{array}$$

$$B = (\tilde{\Omega}_1')^{-1} \circ (\tilde{\Omega}_0') \Leftrightarrow (\tilde{\Omega}_1') \circ B = \tilde{\Omega}_0' \Leftrightarrow \forall w_0 \in W_0, \forall u \in U, \Omega_0(w_0, u) = \Omega_1(Bw_0, u)$$

On pose ensuite $L \coloneqq Id|_U + B : U \oplus W_0 \to U \oplus W_1$. Immédiatement $L|_U = Id|_U$. Il ne reste plus qu'à vérifier que $L^*\Omega_1 = \Omega_0$. Pour u, u' dans U et w_0, w_0' dans W_0 :

$(L^*\Omega_1)(u + w_0, u' + w_0') = \Omega_1(u + Bw_0, u' + Bw_0') = \Omega_1(u, u') + \Omega_1(u, Bw_0') + \Omega_1(Bw_0, u') + \Omega_1(Bw_0, Bw_0') = 0 - \Omega_1(Bw_0', u) + \Omega_1(Bw_0, u') + 0 = -\Omega_0(w_0', u) + \Omega_0(w_0, u') = \Omega_0(u + w_0, u' + w_0')$.

Car U et W_0 sont lagrangien.
On peut conclure. □

Pour démontrer les théorèmes de Weinstein on a besoin comme lemme du théorème d'extension de Whitney.

Théorème 1.49 (Théorème d'extension de Whitney)**.** *Soit M une variété différentielle et X une sous-variété de M. S'il existe une application $L : p \to L_p, X \to \mathrm{Aut}(T_pM)$, $L_p : T_pM \xrightarrow{\sim} T_pM$, telle que $L_p|_{T_pX} = Id|_{T_pX}$.*

Alors il existe un plongement $h : \mathcal{N} \to M$, $\mathcal{N}$ un voisinage de X dans M tel que $h|_X = Id|_X$, $d_ph = L_p$ pour tout p dans X.

Théorème 1.50 (Théorème du voisinage lagrangien de Weinstein)**.** *Soit M une $2n$-variété différentielle. X une n-sous-variété compacte de M et i l'inclusion canonique. Soit ω_0 et ω_1 deux formes symplectiques sur M telles que X soit lagrangien pour les deux, c'est-à-dire $i^*\omega_0 = i^*\omega_1 = 0$. Alors il existe $\mathcal{U}_0$, $\mathcal{U}_1$ des voisinages de X dans M, et un difféomorphisme $\phi : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}_1$ tel que*

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & {\scriptstyle i}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle i} & \\ \mathcal{U}_0 & & \xrightarrow[\phi]{} & & \mathcal{U}_1 \end{array}$$

soit commutatif et tel que $\phi^*\omega_1 = \omega_0$.

Démonstration. On choisit une métrique riemannienne g sur M. Pour tout p dans M, g_p est un produit scalaire sur T_pM. Soit p dans X,T_pX est un sous-espace vectoriel de T_pM, on pose $W \coloneqq T_pX^\perp$ le perpendiculaire pour le produit scalaire (et non une forme symplectique) g_p. À partir de 1.48, on peut construire $L_p : T_pM \to T_pM$ avec $L_p|_{T_pX} = Id_X$ et $L_p^*\omega_1|_p = \omega_0|_p$, et cette construction canonique nous donne aussi que $p \to L_p$ est lisse (lu dans chaque carte, la fonction est lisse en fonction de ses entrées).

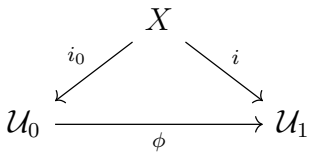
On applique le théorème d'extension de Whitney : il existe un voisinage $\mathcal{N}$ de X et un plongement $h : \mathcal{N} \to M$ avec $h|_X = Id_X$ et $d_p h = L_p$ pour tout p dans X. Puis pour tout p dans X :

$$(h^*\omega_1)_p = (d_p h)^*\omega_1|_p = L_p^*\omega_1|_p = \omega_0|_p$$

On peut alors appliquer 1.46 à ω_0 et à $h^*\omega_1$, on trouve alors un voisinage $\mathcal{U}_0$ de X et un plongement $f : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{N}$ tel que $f|_X = Id_X$ et $f^*(h^*\omega_1) = \omega_0$ sur $\mathcal{U}_0$. On pose enfin $\phi = h \circ f$ pour conclure. □

Théorème 1.51 (Théorème du voisinage tubulaire de Weinstein)**.** *Soit (M, ω) une variété symplectique et X une sous-variété lagrangienne compacte. Soit ω_0 la forme symplectique canonique sur T^*X et $i_0 : X \to T^*X$ l'immersion en tant que section, et $i : X \to M$ l'immersion canonique (lagrangienne).*

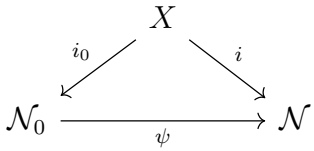
Il existe des voisinages $\mathcal{U}_0$, $\mathcal{U}$ de X dans respectivement T^*X et M, et un difféomorphisme $\phi : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}$ tel que :



soit commutatif et tel que $\phi^*\omega_1 = \omega_0$.

Démonstration. Comme son nom l'indique, ce théorème repose sur le théorème du voisinage tubulaire et sur le théorème du voisinage lagrangien de Weistein.

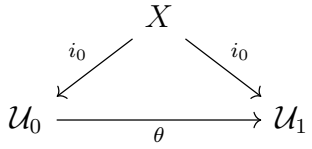
D'une part, puisque $NX \simeq T^*X$, on peut trouver un voisinage $\mathcal{N}_0$ de X dans T^*X, un voisinage $\mathcal{N}$ de X dans M et un difféomorphisme $\psi : \mathcal{N}_0 \to \mathcal{N}$ tel que



soit commutatif.

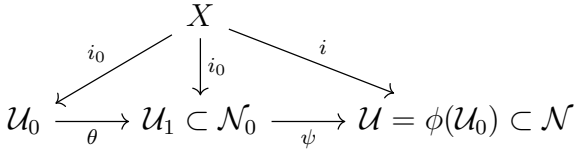
Soit maintenant ω_0 la forme canonique sur T^*X et $\omega_1 = \psi^*\omega_0$ deux formes symplectiques sur $\mathcal{N}_0$. X est une sous-variété lagrangienne de T^*X pour les deux formes symplectiques.

Il existe donc des voisinages $\mathcal{U}_0$ et $\mathcal{U}_1$ de X dans $\mathcal{N}_0$ et un difféomorphisme $\theta : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}_1$ tel que



soit commutatif et tel que $\theta^*\omega_1 = \omega_0$.

On pose ensuite $\phi = \psi \circ \theta$ et $\mathcal{U} = \psi(\mathcal{U}_0)$, on a $\phi^*\omega = (\psi \circ \theta)^*\omega = \theta^*\psi^*\omega = \theta^*\omega_1 = \omega_0$.



.

□

2 Mécanique Hamiltonienne

Dans cette section nous développons le formalisme mathématique de la mécanique hamiltonienne et montrons comment il s'utilise pour résoudre des problèmes de mécanique classique. Notre exemple fondamental que nous suivrons le long des sous-sections à venir sera celui du mouvement des N-corps.

La première sous-section se concentrera sur la formulation géométrique des équations du mouvement, soit les équations de Hamilton-Jacobi. La deuxième présentera la formulation analytique, par le calcul des variations, du formalisme, par les équations d'Euler-Lagrange. Enfin la troisième montreras le lien entre les deux par la transformation de Legendre.

2.1 Champ Hamiltonien et équations d'Hamilton-Jacobi

Proposition 2.1. *Soit (M, ω) une variété symplectique, et $H : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. Il existe un unique champ de vecteur X_H sur M vérifiant $\iota_{X_H}\omega = dH$.*

Si on note ϕ_t son flot, pour les t où il est définit, il préserve ω : $\phi_t^*\omega = \omega$.

On appelle H l'Hamiltonien, et X_H le champ de vecteur hamiltonien, ou juste champ hamiltonien.

Démonstration. L'existence et l'unicité découle de la non dégénérescence de ω.

On a : $\frac{d}{dt}\phi_t^*\omega = \phi_t^*\mathcal{L}_{X_H}\omega = \phi_t^*(d\iota_{X_H}\omega + \iota_{X_H}d\omega) = \phi_t^*(ddH + 0) = 0$. □

Proposition 2.2. *Soit X_H un champ hamiltonien sur une variété M, il préserve sa fonction hamiltonienne H, et les courbes intégrales $\{\phi_t(x) \mid t \in \mathbb{R}\}$ sont contenus dans un ensemble de niveau.*

Démonstration. On a $X_H(H) = dH(X_H) = \iota_{X_H}(X_H) = \omega(X_H, X_H) = 0$, donc X_H préserve H.

On a ensuite pour x dans M, t dans l'ensemble de définition du flot,

$$\frac{d}{dt}(H(\phi_t(x))) = d_{\phi_t(x)}H \circ \frac{d}{dt}\phi_t(x) = d_{\phi_t(x)}H \circ X_H(\rho_t(x)) = X_H(H(\rho_t(x))) = 0$$

donc à partir de la condition initiale, pour tout t dans l'ensemble de définition du flot, $H(x) = H(\phi_t(x))$.

□

Définition 2.3. *On appelle champ de vecteur symplectique un champ X qui préserve ω, c'est à dire que pour tout t où le flot ϕ du champ est définit, $\phi_t^*\omega = \omega$.*

Proposition 2.4. *On a équivalence entre*

1. *X est un champ symplectique*
2. *$\mathcal{L}_X\omega = 0$*
3. *$\iota_X\omega = 0$*

Démonstration. La constance de $t \to \phi_t^*\omega$ équivaut à ce que $\frac{d}{dt}(\phi_t^*\omega)|_{t=0} = 0$, soit par définition que $\mathcal{L}_X\omega = 0$.

Puis par la formule de Cartan, on a $\mathcal{L}_X\omega = \iota_X d\omega + d\iota_X\omega$, ω étant fermée, on trouve que la nullité de $\mathcal{L}_X\omega$ équivaut à la fermeture de $\iota_X\omega$. □

On déduit donc qu'un champ hamiltonien X est un cas particulier de champ symplectique pour lequel $\iota_X\omega$ est exact.

Si $H^1_{dR}(M) = 0$, les champs symplectiques sont tous hamiltoniens. Localement, et sur chaque ouvert contractile, les champs symplectiques sont hamiltoniens.

Nous présentons maintenant les équations de Hamilton-Jacobi, considérons $\mathbb{R}^{2n}$, muni des coordonnées symplectiques usuelles $(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$, et de la forme différentielle canonique $\omega_0 = \sum_i dx_i \wedge d\xi_i$.

Proposition 2.5. *Soit $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ et H un Hamiltonien. Une courbe intégrale $t \to (x(t), \xi(t))$ du Hamiltonien vérifie les équations d'Hamilton-Jacobi :* $\begin{cases} \frac{dx_i}{dt}(t) = \frac{\partial H}{\partial \xi_i} \\ \frac{d\xi_i}{dt}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases}$

Démonstration. On commence par montrer que $X \coloneqq \sum_i (\frac{\partial H}{\partial \xi_i}\partial x_i - \frac{\partial H}{\partial x_i}\partial \xi_i) = X_H$. En effet :

$$\iota_X\omega = \sum_i (\iota_X(dx_i \wedge d\xi_i)) = \sum_i (\iota_X dx_i \wedge d\xi_i - dx_i \wedge \iota_X d\xi_i) = \sum_i (\frac{\partial H}{\partial \xi_i} d\xi_i + \frac{\partial H}{\partial x_i}\partial x_i) = dH$$

Maintenant, en écrivant $\frac{d\phi_t}{dt} = X_H \circ \phi_t$ en coordonnées, on trouve bien à partir de la formule de X_H les équations de Hamilton-Jacobi. □

Dans le cas d'une variété symplectique, en choisissant des coordonnées adaptées (via le théorème de Darboux), on retrouve ces équations sur des voisinages.

Expliquons maintenant le sens physique de ces équations. Une masse m dans $\mathbb{R}^3$, sous le système de coordonnées $x = (x_1, x_2, x_3)$, sous le potentiel $V(x)$, se déplace le long de la courbe $x(t)$, vérifiant

$$m\frac{d^2x}{dt} = -\nabla V(x).$$

Posons alors les vecteur *quantité de mouvement* $\xi \coloneqq m\frac{dx_i}{dt}$, et la fonction *énergie totale du système* $H(x, \xi) = \frac{1}{2m}|\xi|^2 + V(x)$. En prenant $T^*\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6$, avec comme coordonnées (x_i, ξ_i), la seconde loi de Newton se réécrit :

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{m}\xi_i = \frac{\partial H}{\partial \xi_i} \\ \frac{d\xi_i}{dt} = m\frac{d^2x_i}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases}$$

Soit on retrouve les équations de Hamilton-Jacobi.

L'intérêt de ce formalisme est en fait de pouvoir traiter tous les problèmes mécaniques "d'un coup" en s'intéressant au Hamiltonien sur une variété, puis dans les cas particulier retrouver quelle est l'écriture du Hamiltonien, comme on l'a fait ici, pour comprendre les problèmes spécifiques.

On conclut cette sous-section en montrant comment apparaissent les structures de Lie et de Poisson dans ces questions mécanique.

On rappelle qu'on peut munir l'ensemble des champs de vecteur sur une variété du crochet de Lie. Quand on voit les champs de vecteurs comme des opérateurs différentielles sur les fonctions, $[X, Y]f \coloneqq X(Yf) - Y(Xf)$. Ce crochet munit $\mathfrak{X}(M)$ d'une structure d'algèbre de Lie (de dimension infinie).

Proposition 2.6. *Soit une variété M. Pour toute forme différentielle α et champs de vecteurs X, Y, on a $\iota_{[X,Y]}\alpha = \mathcal{L}_X\iota_Y\alpha - \iota_Y\mathcal{L}_X\alpha = [\mathcal{L}_X, \iota_Y]\alpha$.*

Proposition 2.7. *On démontre cette relation pour les fonctions et les 1-formes exactes, ensuite, puisqu'on a des anti-dérivations pour le produit $\wedge$ de chaque coté des égalités, ce sera suffisant pour étendre le résultat à toutes les formes différentielles.*

Soit une fonction f. On a $\iota_{[X,Y]}f = 0$, et $\mathcal{L}_X(\iota_Y f) - \iota_Y(\mathcal{L}_X f) = \mathcal{L}_X(0) - \iota_Y(X(f)) = 0 - 0 = 0$.

Pour une 1-forme exacte dg, d'une part :

$$\iota_{[X,Y]}(dg) = dg([X,Y]) = [X,Y](g) = X(Y(g)) - Y(X(g)).$$

D'autre part :

$$\mathcal{L}_X(\iota_Y(dg)) = \mathcal{L}_X(Yg) = X(Yg), \text{ et } \iota_Y\mathcal{L}_X(dg) = \iota_Y d(\mathcal{L}_X g) = \iota_Y d(Xg) = Y(Xg).$$

On a finalement : $\mathcal{L}_X\iota_Y(dg) - \iota_Y\mathcal{L}_X(dg) = X(Yg) - Y(Xg) = \iota_{[X,Y]}dg$

Proposition 2.8. *Soit (M,ω) une variété symplectique et X, Y deux champs de vecteurs symplectiques. $[X,Y]$ est alors un champ de vecteur hamiltonien avec pour fonction hamiltonienne $\omega(Y,X)$.*

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}\iota_{[X,Y]}\omega &= \mathcal{L}_X\iota_Y\omega - \iota_Y\mathcal{L}_X\omega \\ &= d\iota_X\iota_Y\omega + \iota_X d\iota_Y\omega - \iota_Y d\iota_X\omega - \iota_Y\iota_X d\omega \\ &= d(\omega(Y,X))\end{aligned}$$

□

On rappelle que pour une algèbre de Lie L, une sous-algèbre L' est un sous-espace vectoriel dont le crochet de deux de ses éléments reste dans le sous-espace.

On note $\mathfrak{X}^{\text{sympl}}(M)$ et $\mathfrak{X}^{\text{ham}}(M)$ les sous-ensembles des champs de vecteur respectivement symplectique et hamiltonien sur M.

Proposition 2.9. *On a les inclusions d'algèbres de Lie*

$$(\mathfrak{X}^{\text{ham}}(M), [.,.]) \subset (\mathfrak{X}^{\text{sympl}}(M), [.,.]) \subset (\mathfrak{X}(M), [.,.]) \ .$$

Démonstration. Soit X, Y deux champs de vecteurs symplectiques, on a $\iota_{[X,Y]} = d\iota_X\iota_Y\omega = 0$ car Y est symplectique, donc $[X,Y]$ est symplectique (on remarque qu'il suffit qu'un seul des deux soit symplectique).

Supposons les maintenant hamiltoniens, ils sont en particulier symplectiques, puis par la proposition précédente $\iota_{[X,Y]}$ est exacte, donc $[X,Y]$ est hamiltonien. □

On vient en fait de montrer que $\mathfrak{X}^{\text{ham}}(M)$ contient *l'algèbre dérivée* de $\mathfrak{X}^{\text{sympl}}(M)$. Cette inclusion est cependant la plupart du temps stricte.

Nous donnons maintenant la définition du crochet de Poisson. La géométrie de Poisson est un domaine d'étude de la géométrie différentielle à part entière qui mérite d'être considéré pour lui-même, nous ne donnons ici que les définitions et premières propriétés "élémentaires".

Définition 2.10. *Soit f et g deux fonctions lisses sur M. On définit le crochet de Poisson des deux fonctions comme*

$$\{f,g\} \coloneqq \omega(X_f, X_g) = df \circ X_g = X_g f$$

Puisque $X_{\omega(X_f,X_g)} = [X_g, X_f]$, on a $X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]$.
On a immédiatement que le crochet de Poisson est bilinéaire antisymétrique.

Proposition 2.11. *Le crochet de poisson vérifie l'identité de Jacobi*

$$\forall f,g,h \in C^\infty(M),\ \{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$$

et l'identité de Leibniz

$$\forall f,g,h \in C^\infty(M),\ \{f,gh\} = \{f,g\}h + g\{f,h\} \tag{3}$$

Par ailleurs, en coordonnées canoniques on a : $X_f = \sum_i (\frac{\partial f}{\partial \xi_i}\partial x_i - \frac{\partial f}{\partial x_i}\partial \xi_i)$, puis donc $\{f,g\} = \sum_i (\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial \xi_i} - \frac{\partial f}{\partial \xi_i}\frac{\partial g}{\partial x_i})$.

Démonstration. On a premièrement :

$$\begin{aligned}\{f,\{g,h\}\} &= X_{\{g,h\}}f = -[X_g, X_h]f = -X_gX_hf = -X_gX_hf + X_hX_gf \\ &= -X_g\{f,h\} + X_h\{f,g\} = -\{\{f,h\},g\} + \{\{f,g\},h\} \\ &= -\{g,\{h,f\}\} - \{h,\{f,g\}\}\end{aligned}$$

D'autre part, sur chaque carte canonique :

$$\begin{aligned}\{f,gh\} &= \sum_i (\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial (gh)}{\partial \xi_i} - \frac{\partial f}{\partial \xi_i}\frac{\partial (gh)}{\partial x_i}) = \sum_i (\frac{\partial f}{\partial x_i}(\frac{\partial g}{\partial \xi_i}h + g\frac{\partial h}{\partial \xi_i}) - \frac{\partial f}{\partial \xi_i}(\frac{\partial g}{\partial x_i}h + g\frac{\partial h}{\partial x_i})) \\ &= (\sum_i (\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial \xi_i} - \frac{\partial f}{\partial \xi_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}))h + g(\sum_i (\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial h}{\partial \xi_i} - \frac{\partial f}{\partial \xi_i}\frac{\partial h}{\partial x_i})) \\ &= \{f,g\}h + g\{f,h\}\end{aligned}$$

□

En posant ces propriétés comme définition, on appelle *algèbre de Poisson* la donnée d'une algèbre associative commutative $(\mathcal{P}, \{.,.\})$ telle que $\{.,.\}$ soit un crochet de Lie vérifiant en plus la règle de Leibniz, et structure de Poisson la structure dont on munie une variété lorsqu'on la munie d'un crochet de Poisson.

On vérifie immédiatement que $\{f,g\} \to -[X_f, X_g]$ est un anti-morphisme d'algèbre de Lie.

2.2 Principe variationnel et équations d'Euler-Lagrange

On considère une masse (ponctuelle) m se déplaçant dans $\mathbb{R}^3$, sous le champ de force F. On appelle chemin une courbe $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$.

On commence par définir le *travail* le long d'un chemin sur $\mathbb{R}^n$, avant de généraliser naturellement aux cas des variétés.

Définition 2.12. *Pour $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, on appelle travail de γ sous le champ de force $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la quantité réelle $W_\gamma = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \frac{d\gamma}{dt}(t)\rangle \ dt$.*

Définition 2.13. *On dit que F est conservatif si W_γ ne dépend que des points de départ et d'arrivé $\gamma(a)$, $\gamma(b)$.*

Définition 2.14. *Dans le même contexte que précédemment, supposons F conservatif, on fixe a et donc $\gamma(a)$. On appelle énergie potentielle la fonction $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $V(\gamma(b)) \coloneqq W_\gamma$.*

Cette quantité est bien défini puisque le travail ne dépend que des extrémités et qu'on fixe la première.

La seconde loi de Newton s'écrit (lorsque la masse est constante) sous le champ de force F : $m\frac{d^2x}{dt^2}(t) = F(x(t))$. Dans le cas ou le F est conservatif on peut réécrire cette équation.

On note dans la suite le gradient partiel $\frac{\partial}{\partial x}$, qui a une fonction $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$ différentiable associe

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f \\ \partial_{x_2} f \\ \partial_{x_3} f \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.15. *Sous les mêmes hypothèses, et pour F un champ conservatif, l'équation de la seconde loi de Newton s'écrit $m\frac{d^2x}{dt^2}(t) = -\frac{\partial V}{\partial x}(x(t))$*

Démonstration. Il faut démontrer que $\frac{\partial V}{\partial x} = -F$. Calculons une dérivée directionnelle : $\frac{U(x+he_j)-U(x)}{h} = -\frac{1}{h}\int_x^{x+he_j} F(\gamma(t)) \ .\frac{d\gamma}{dt}(t) \ dt \to -F_j(x)$ pour $h \to 0$ par théorème fondamental de l'analyse. Soit finalement $\partial_{x_j} V = -F_j$ pour $j = 1,2,3$. Donc finalement on a bien $\frac{\partial V}{\partial x} = -F$. □

On s'intéresse maintenant plus au mouvement d'une seule particule mais de plusieurs. Si on a n particules, on note alors $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ le vecteur comportant les coordonnées dans $\mathbb{R}^3$ de chaque particules. $\mathbb{R}^{3n}$ est l'espace de configuration.

On ne s'intéresse alors plus au chemin que parcours une particule dans l'espace, mais au chemin qui mène une configuration des particules vers une autres : $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^{3n}$.

Définition 2.16. *On note $\mathcal{P}(a,b,p,q) = \{\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^{3n} \mid \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}$ l'ensemble des chemins allant de p à q pendant le temps $t \in [a,b]$.*

Quand il n'y a pas d'ambiguïté sur les extrémités et le temps, on notera simplement $\mathcal{P}$.

Définition 2.17. *On appelle action du chemin γ dans $\mathcal{P}$ la quantité réelle*

$$\mathcal{A}_\gamma \coloneqq \int_a^b (\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} |\frac{d\gamma_i}{dt}(t)|^2 - V(\gamma(t))) \ dt$$

On généralise maintenant ces notions au cas où l'espace de configuration n'est plus nécessairement $\mathbb{R}^{3n}$, mais une variété différentielle quelconque. On garde la notation $\mathcal{P}$ pour les chemins sur les variétés.

Définition 2.18. *Soit M une variété différentielle, et $F : TM \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. Soit $\gamma : [a,b] \to M$ une courbe lisse sur M.*

On définit le relevé de γ sur TM par $\tilde{\gamma}(t) \coloneqq (\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t)) \in TM$.

On définit l'action de γ par

$$\mathcal{A}_\gamma \coloneqq \int_a^b (\tilde{\gamma}^* F)(t) dt = \int_a^b F(\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t)) dt$$

Le principe de moindre action, que l'on prend comme postulat, stipule alors que le chemin physique γ_0 choisit par les particules est celui qui minimise l'action $\mathcal{A}_\gamma$.

Proposition 2.19. *Soit $\gamma_0 : [a,b] \to m$ un chemin minimisant l'action $\mathcal{A}$ sous F. Soit $[c,d]$ un sous-intervalle de $[a,b]$. Alors $\gamma_0|_{[c,d]}$ minimise l'action $\mathcal{A}$ parmi les chemins $\mathcal{P}(c,d,\gamma_0(c),\gamma_0(d))$.*

Démonstration. Par l'absurde, s'il existait un chemin sur $[c,d]$ ayant une plus petite action que $\gamma_0|_{[c,d]}$, on pourrait alors construire un chemin sur $[a,b]$ ayant une action plus petite que celle de γ_0, en remplaçant le morceau sur $[c,d]$, et en lissant la courbe autour des points $\gamma(c)$ et $\gamma(d)$ si nécessaire. □

On va maintenant chercher une condition nécessaire pour une chemin pour minimiser l'action. Nous allons voir comment apparaisse les équations d'Euler-Lagrange.

Proposition 2.20. *Soit M une variété et p et q deux points suffisamment proche pour qu'ils appartiennent à une même carte $(U, x_1, \dots, x_n)$. On choisit une carte de TU $(x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n)$.*

Soit γ_0 le chemin minimisant l'action sur $\mathcal{P}(a,b,p,q)$ sous F. Alors le γ_0 vérifie les équations d'Euler-Lagrange :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \frac{\partial F}{\partial x_i}(\gamma_0(t), \frac{d\gamma_0}{dt}(t)) = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial v_i}(\gamma_0(t), \frac{d\gamma_0}{dt}(t)) \tag{4}$$

Démonstration. Soit $c_1, \dots, c_n$ des fonctions lisses de $[a,b]$ dans M, tel que $c_i(a) = c_i(b) = 0$.

On pose $\gamma_\varepsilon : [a,b] \to U : t \to (\gamma_1(t) + \varepsilon c_1(t), \dots, \gamma_n(t) + \varepsilon c_n(t))$.

Pour ε assez petit, γ_ϵ est bien défini et est dans $\mathcal{P}(a,b,p,q)$.

Si γ_0 minimise $\mathcal{A}$, alors $\frac{d\mathcal{A}_\varepsilon}{d\epsilon}(0) = 0$, ce qui se réécrit :

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d\mathcal{A}_\varepsilon}{d\varepsilon}(0) &= \int_a^b \sum_i \left[\frac{\partial F}{\partial x_i}(\gamma_0(t), \gamma_0'(t))c_i(t) + \frac{\partial F}{\partial v_i}(\gamma_0(t), \gamma_0'(t))\frac{dc_i}{dt}(t)\right] dt \text{ par la formule de Leibniz} \\ &= \int_a^b \sum_i \left[\frac{\partial F}{\partial x_i}(\gamma_0(t), \gamma_0'(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial v_i}(\gamma_0(t), \gamma_0'(t))\right] c_i(t)dt \text{ par intégration par partie} \end{aligned}$$

Puisque cette équation est vraie pour tous les n-uplets de c_i vérifiant les conditions aux bords, on déduit que l'intégrande est nul, soit :

$$\forall i, \frac{\partial F}{\partial x_i}(\gamma_0(t), \gamma_0'(t)) = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial v_i}(\gamma_0(t), \gamma_0'(t))$$

□

2.3 Transformation de Legendre

Avant de voir comment se relient les équations d'Hamilton-Jacobi et d'Euler-Lagrange, nous rappelons quelques définitions et propriétés des fonctions convexes de plusieurs variables.

Pour une fonction lisse F allant d'un espace vectoriel de dimension finie V dans $\mathbb{R}$, on notera $d_p^2 F$ la hessienne de F appliquée en p.

Définition 2.21. *$F : V \to \mathbb{R}$ est dite strictement convexe si $d_p^2 F$ est définie positive pour tout p dans V.*

On rappelle une propriété des fonctions convexes en dimension finie.

Proposition 2.22. *Pour $F : V \to \mathbb{R}$ strictement convexe, les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *F a un point critique p, i.e. $d_pF = 0$*
2. *F admet un minimum local*
3. *F admet un unique point critique, qui est un minimum global*
4. *F est propre, i.e. $p \to \infty$ implique $F(p) \to \infty$.*

On dit qu'une telle fonction strictement convexe est stable.

Soit une fonction F strictement convexe sur V et l une forme linéaire sur V. Posons $F_l \coloneqq V \to \mathbb{R} : F_l(v) = F(v) - l(v)$.

Puisque $d_p^2F = d_p^2F_l$, la strict convexité de F équivaut à celle de F_l.

Définition 2.23. *On appelle ensemble de stabilité d'une fonction strictement convexe F sur V l'ensemble*

$$S_F \coloneqq \{l \in V^* \mid F_l \text{ est stable}\}$$

Proposition 2.24. *Si $F : V \to \mathbb{R}$ est strictement convexe et stable, S_F est ouvert et convexe.*

Démonstration. Si F est stable, S_F est non vide car contient 0_{V^*}. Soit l_1, l_2 deux formes linéaires dans S_F, λ dans $[0, 1]$. Comme $F_{l_1}(p), F_{l_2}(p) \to +\infty$ quand $p \to +\infty$, on a $\lambda F_{l_1}(p)+(1-\lambda)F_{l_2}(p) \to +\infty$ pour $+p \to \infty$, soit $\lambda F_{l_1} + (1 - \lambda)F_{l_2}$ est stable, soit S_F est convexe.
Soit l dans S_F, si on choisit une forme linéaire l' suffisamment proche de l pour la norme d'opérateur de V^*, en utilisant les propriétés de de strict convexité et de stabilité de F, on trouve que $F(p) - l(p) + l(p) - l'(p) \to +\infty$, puis l' est dans S_F. □

Définition 2.25. *On appelle transformé de Legendre associé à $F \in C^\infty(V; \mathbb{R})$ l'application*

$$L_F : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V^* \\ p & \longmapsto & d_pF \in T_p^*V \simeq V^* \end{array}$$

Proposition 2.26. *Si F est strictement convexe, alors L_F est un difféomorphisme de V dans S_F.*

Définition 2.27. *On appelle la fonction duale F^* de F l'application*

$$F^* : \begin{array}{ccc} S_F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ l & \longmapsto & -\min_{p\in V} F_l(p) =: F^*(l) \end{array}.$$

Théorème 2.28. *On a $L_F^{-1} = L_{F^*}$.*

On renvoie à un cours d'analyse convexe pour une preuve.

On applique maintenant ces définitions et propriétés au cas des variétés et on fait le lien avec les deux sous-sections précédentes. L'idée va être de poser la transformée de Legendre sur tous les espaces tangents et de recoller.

Définition 2.29. *Soit $F : TM \to M$ une fonctions tel que pour tout p, $F_p \coloneqq F|_{T_p^*M}$ est strictement convexe, et tel que $S_{F_p} = T_p^*M$.*

On pose les applications :

$$\mathcal{L} : TM \to T^*M, \ \mathcal{L}|_{T_pM} = L_{F_P}$$
$$H : T^*M \to \mathbb{R}, \quad H|_{T_p^*M} = F_p^*$$

Proposition 2.30. *H et $\mathcal{L}$ sont lisses, et $\mathcal{L}$ est un difféomorphisme.*

Théorème 2.31. *Sous les mêmes hypothèses, soit $\gamma : [a,b] \to M$ une courbe et $\tilde{\gamma}$ son relevé. γ vérifie les équations d'Euler-Lagrange dans chaque carte si et seulement si $\mathcal{L} \circ \tilde{\gamma} : [a,b] \to T^*M$ est une courbe intégrale du champ de vecteur hamiltonien X_H.*

Démonstration. On pose les cartes

$$(U, x_1, \dots, x_n)$$
$$(TU, x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n)$$
$$(T^*U, x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$$

Sur TU, F est une fonction de (x,v). Sur T^*U, H est une fonction de (x,ξ).

On a $\mathcal{L} : TU \to T^*U : (x,v) \to \xi = L_{F_x}(v) = \frac{\partial F}{\partial v}(x,v)$ et $H : T^*U \to \mathbb{R} : (x,\xi) = F_x^*(\xi) = \min_{T_xM} F_\xi = \xi.v - F(x,v)$, avec $\mathcal{L}(x,v) = (x,\xi)$.

On pose $(x(t),\xi(t)) = \mathcal{L}(x(t),x'(t))$, on veut donc montrer que $t \to (x(t),\xi(t))$ vérifie les équations de Hamilton si et seulement si $t \to (x(t),x'(t))$ vérifie Euler-Lagrange.

On a premièrement

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \xi}(x,\xi) = L_{F_x^*}(\xi) = L_{F_x}^{-1}(\xi) \Leftrightarrow \xi = L_{F_x}(x'(t))$$

De plus, si $(x,\xi) = \mathcal{L}(x,v)$, alors en différentiant selon x et avec $\xi = L_{F_x}(v) = \xi(x,v)$, on a

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot v - \frac{\partial F}{\partial x}$$

On a $\frac{\partial H}{\partial \xi} = v$. Puis comme $\xi = L_{F_x}(v)$ et par hypothèse, on trouve :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial v}(x,v) = \frac{d\xi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x,\xi) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,v) \Leftrightarrow \text{Euler-Lagrange}$$

. □

3 Fibrés de Green et applications

Dans cette section on donne la construction des *fibrés de Green* et quelques applications à la dynamique. On se placera majoritairement dans le cas où l'Hamiltonien est indépendant du temps.

On dit qu'un Lagrangien (et son Hamiltonien associé) est *de Tonelli* si :

1. le flot associé est complet
2. le Lagrangien est strictement convexe (sa hessienne est définie positive)
3. le Lagrangien est uniformément superlinéaire : uniformément en x, $\lim_{||v||\to\infty} \frac{L(x,v)}{||v||} = +\infty$

.

3.1 Formes quadratiques et champs de formes quadratiques

Définition 3.1. *Pour E un espace vectoriel réel de dimension finie, on note $Q(E)$ l'espace vectoriel réel (de dimension finie) des formes quadratiques définies sur E, et $\mathrm{Sym}^2(E^*)$ l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur E.*

On démontre immédiatement que cet espace est une espace vectoriel réel de dimension finie à partir de la formule de polarisation.

Définition 3.2. *On définit le relation d'ordre partiel $\ll$ sur les formes quadratiques d'un espace vectoriel de dimension finie par $q \ll q'$ si et seulement si $q' - q$ est définie positive.*

Proposition 3.3. *Soit $\mathcal{E}$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Soit $\{q_t\}_{t\in\mathcal{E}}$ une famille de forme quadratique sur E croissante (totalement ordonnée) pour $\ll$, c'est à dire ques $\leq t \Rightarrow q_s \ll q_t$, et tel que pour tout x dans E, $q_t(x) \leq 0$.*

Alors $q(x) \coloneqq \sup_{t\in\mathcal{E}} q_t(x) < \infty$, et q est une forme quadratique sur E.

Lorsqu'on munit $Q(E)$ de sa topologie d'espace vectoriel réel de dimension finie, et qu'on fait tendre t vers la borne supérieure (éventuellement $+\infty$) de $\mathcal{E}$, $(q_t)_t$ converge vers q pour la topologie de $Q(E)$.

On a bien sur un résultat analogue pour des familles décroissantes minorées, qui se démontre de manière analogue.

Démonstration. Le caractère définit positif nous donne que pour tout x réel fixé, pour $t > s$, $(q_t - q_s)(x) \geq 0$ soit $q_t(x) \geq q_s(x)$. Soit pour tout x, la famille de réels $\{q_t(x)\}_{t\in\mathcal{E}}$ est croissante, et majoré par 0 par hypothèse, donc on peut en extraire une borne supérieur $q(x)$. On doit donc montrer que $x \to q(x)$ est bien une forme quadratique.

Pour chaque forme quadratique q_t, on note b_t sa forme bilinéaire symétrique associé par la formule de polarisation. On a :

$$b_t(x,y) = \tfrac{1}{2}(q_t(x+y) - q_t(x) - q_t(y)) \xrightarrow[t\to\infty]{} \tfrac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) =: b(x,y)$$

Il nous suffit alors de montrer que b est bilinéaire symétrique pour conclure que q est une forme quadratique. La bilinéarité se déduit de la linéarité du passage à la limite (quand tous les termes existe, ce qui et le cas ici). Pour la symétrie, on a :

$$b(x,y) = \lim b_t(x,y) = \lim b_t(y,x) = b(y,x).$$

Pour justifier que $(q_t)_t$ converge au sens topologique, en choisissant une base (e_i) de E, la convergence pour tout x, y dans E de $b_t(x, y)$ nous donne en particulier la convergence pour $b_t(e_i, e_j)$. Soit on a la convergence des coordonnées de la matrice associé à b_t, autrement dit on a la convergence en norme infinie de b_t vers b, et toutes les normes sont équivalentes en dimension finie donc on a bien convergence de b_t vers b, puis immédiatement de q_t vers q.

□

3.2 Construction des fibrés de Green

L'idée est de se donner un espace vectoriel symplectique E et un sous-espace lagrangien fixé, qu'on appelle la verticale V. Puis de construire une bijection entre l'ensemble des couples de sous-espaces lagrangiens transverses à la verticale, et l'ensemble des formes quadratiques sur un espace vectoriel de même dimension que E. On utilisera alors les résultats sur les convergences de suites de formes quadratiques de la section précédente pour déduire des "limites d'espaces vectoriels".

Dans notre cas, l'espace E est destiné à être un espace tangent de T^*M en un point.

Définition 3.4. *Pour (E, Ω) un espace vectoriel symplectique et V un sous-espace lagrangien, on note $\mathcal{L}_V(E)$ l'ensemble des sous-espaces lagrangiens transverses à V, et $p : E \to E/V$ la projection sur l'espace quotient.*

Proposition 3.5. *Pour $L \in \mathcal{L}_V(E)$, la restriction $p_{|L} : L \to E/V$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.*

Démonstration. Pour l'injectivité, $p_{|L}(x) = 0 \Leftrightarrow x + V = 0_{E/V} = V \Leftrightarrow x \in V \cap L = \{0\}$ par transversalité.

Puis comme $\dim L = n = 2n - n = \dim(E/V)$. Donc par le théorème du rang on conclut que $p_{|L}$ est aussi surjective. □

Dans la suite, pour $L_i \in \mathcal{L}_V(E)$ on notera $l_i \coloneqq (p_{|L_i})^{-1}$.

Proposition 3.6. *Pour $a, b, x \in E/V$ et $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_V(E)$, $\Omega(l_i(a), l_i(b)) = 0$, et $l_1(x) - l_2(x) \in V$.*

Démonstration. Le premier point découle du fait que L_i est lagrangien.

Puis on a $p(l_1(x) - l_2(x)) = p(l_1(x)) - p(l_2(x)) = x - x = 0_{E/V}$, donc $l_1 - l_2(x) \in V$. □

Proposition 3.7. *$B : (E/V)^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \to \Omega(l_1(x), l_2(y))$ est bilinéaire symétrique.*

Démonstration. La bilinéarité découle de la (bi)linéarité de chaque composante. Pour la symétrie : puisque V est lagrangien, on a

$$0 = \Omega((l_1 - l_2)(x), (l_1 - l_2)(y)) = \Omega(l_1(x), l_1(y)) - \Omega(l_2(x), l_1(y)) - \Omega(l_1(x), l_2(y)) + \Omega(l_2(x), l_2(y)) =$$
$$-\Omega(l_2(x), l_1(y)) - \Omega(l_1(x), l_2(y)) \Leftrightarrow \Omega(l_2(x), l_1(y)) = \Omega(l_2(y), l_1(x)) \Leftrightarrow B(y, x) = B(x, y)$$

□

On peut alors poser sans ambiguïté la forme quadratique suivante.

Définition 3.8. *On pose $Q(L_1, L_2) : E/V \to \mathbb{R} : \omega \to \Omega(l_1(\omega), l_2(\omega))$.*

On appelle hauteur de L_2 au dessus de L_1 relativement à V la valeur numérique $\Omega(l_1(\omega), l_2(\omega))$

Lemme 3.9. *Pour E, V, L_1, L_2 comme précédemment, on peut écrire de façon unique $L_2 = \{l(x) + Al(x), x \in E/V\}$, avec $A : L_1 \to V$ une application linéaire tel que pour tout x, y dans E/V, $\Omega(l(x) + Al(x), l(y) + Al(y)) = 0$.*

Réciproquement, pour $A : L_1 \to V$ vérifiant l'équation précédente, l'espace L_2 définit comme le graphe de A est bien lagrangien transverse à V.

On notera la similarité des idées avec la preuve de la proposition 1.47.

Démonstration. On a vu que pour x dans E/V, $l_2(x) - l_1(x) = v(x)$ dans V, on peut donc bien définir l'application linéaire $E/V \to V : x \to v(x)$.

$l_2 : E/V \to L_2$ est un isomorphisme, donc pour tout a dans L_2, comme $a = l_2(x) = l_1(x) + v(x)$. Pour pouvoir conclure, on doit donc construire A à partir de v :

$$\begin{array}{ccc} E/V & \xrightarrow{v} & V \\ {\scriptstyle l_1}\downarrow & \nearrow_{A} & \\ L_1 & & \end{array}$$

l_1 est un isomorphisme, donc on peut poser $A \coloneqq v \circ l_1^{-1}$ pour avoir A l'unique application linéaire de L dans V tel que $L_2 = \{l_1(x) + Al_1(x), x \in E/V\}$.

Et pour tout x, y dans E/V, on a $\Omega(l_1(x) + Al_1(x), l_1(y) + Al_1(y)) = 0$ puisque les deux termes sont dans L_2 qui est lagrangien.

Réciproquement, soit $A : L_1 \to V$ vérifiant pour tout x, y dans E/V, $\Omega(l_1(x) + Al_1(x), l_1(y) + Al_1(y)) = 0$. $l_1 + A \circ l_1 : E/V \to E$ est linéaire, donc $L_2 \coloneqq \mathrm{Im}(l_1 + A \circ l_1)$ est une sous-espace de E, on a $\Omega(\mathrm{Im}(l_1 + A \circ l_1), \mathrm{Im}(l_1 + A \circ l_1)) = 0$ par hypothèse, il ne reste donc plus qu'à montrer que L_2 est transverse à V.

Soit y dans $L_2 \cap V$, on a $y = l_1(x) + Al_1(x)$ et $p(y) = 0$, donc

$$0 = p(y) = p(l_1(x) + Al_1(x)) = x + p(Al_1(x)) = x \text{ car } A \text{ a son image dans } V.$$

Donc $x = 0$, puis $y = 0$, soit $L_2 \cap V = 0$, et comme $E = V \oplus L$, pour e dans E, e s'écrit uniquement comme $e = w + l(x) = w - Al_1(x) + Al_1(x) + l(x)$. Or $w - Al_1(x)$ est dans V, et $Al_1(x) + l_1(x)$ est dans L_2. On conclut donc que $L_2 \oplus V = E$ (on trouve don aussi que $\dim(L_2) = n$). On a donc d'un coup que L_2 est transverse à V, et est lagrangien. □

On montre maintenant le résultat reliant les formes quadratiques et les sous-espaces lagrangiens.

Proposition 3.10. *Soit (E, Ω) un espace vectoriel symplectique et V un sous-espace lagrangien.*

$$Q(L, .) : \mathcal{L}_V(E) \to Q(E/V) : L' \to Q(L, L') \text{ est une bijection.}$$

Et $L \cap L' = l^{-1}(\ker Q(L, L')) = l'^{-1}(\ker Q(L, L'))$, en particulier L et L' sont transverses si et seulement si $Q(L, L')$ est non dégénérée.

Démonstration. Le lemme 3.9 nous donne une bijection entre $\mathcal{L}_V(E)$ et $\{A : L \to V \mid \Omega(l + Al, l + Al) = 0\}$. On va montrer

$$\{A : L \to V \mid \Omega(l + Al, l + Al) = 0\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathrm{Sym}^2(L^*) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathrm{Sym}^2((E/V)^*) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} Q(E/V).$$

La seule correspondance non immédiate est la première, la deuxième se fait en composant par l'isomorphisme l dans les deux entrées, la troisième par la formule de polarisation donnant une forme bilinéaire symétrique à partir d'une forme quadratique et inversement. Montrons donc la première correspondance.

Pour un A comme ci-dessus, x, y dans E/V, on a $0 = \Omega(l(x)+Al(x), l(y)+Al(y)) = \Omega(l(x), Al(y))-\Omega(l(y), Al(x))$, car L, L', V sont lagrangiens. Donc $\Omega(l(x), Al(y)) = \Omega(l(y), Al(x))$. On pose alors $\phi : (E/V)^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \to \Omega(l(x), Al(y))$, qui est bien une forme bilinéaire symétrique sur E/V. Puis pour en déduire une forme bilinéaire symétrique sur L, il suffit de poser $\psi : L^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \to \Omega(x, Ay)$.

Réciproquement, si ψ est une forme bilinéaire symétrique sur L. Puisque Ω est non dégénérée, $\tilde{\Omega} : V \to L^* : x \to \Omega(x, .)$ est inversible. Puis pour y dans L, $\psi(y, .)$ est dans L^*, donc $\psi(y, .)$ a un antécédent par $\tilde{\Omega} : \tilde{\Omega}^{-1}(\psi(y, .))$ est dans V.

On pose alors $A : L \to V : y \to \tilde{\Omega}^{-1}(\psi(y, .))$.

A est bien bilinéaire par composition, et, pour x, y dans E/V :

$$\Omega(l(x) + Al(x), l(y) + Al(y)) = \Omega(l(x), Al(y)) - \Omega(l(y), Al(x)) = \psi(x, y) - \psi(y, x) = \psi(x, y) - \psi(x, y) = 0 \text{ par symétrie de } \psi.$$

On conclut donc pour la correspondance.

Pour le deuxième point de la proposition, $L \cap L' = L \cap \{l(x) + Al(x), x \in E/V\} = \{l(x) \mid x \in E/V \text{ et } Al(x) = 0\}$ car $L \cap V = \{0\}$.

On note $\varphi(L, L')$ la forme bilinéaire symétrique associé à $Q(L, L')$. l est un isomorphisme donc $L \cap L' = \ker A$. $l(x) = 0$ et $Al(x) = 0$ équivaut alors à ce que pour tout y dans E/V, $\varphi(L, L')(l(y), Al(x)) = 0$, soit $l(x)$ est dans $\ker \varphi(L, L')$, soit x est dans $\ker Q(L, L')$. Donc finalement $l(\ker Q(L, L')) = L \cap L'$. On peut faire de même avec l' pour l'autre égalité. □

On a ici exhibé plusieurs correspondances pour démontrer notre résultat. On peut démontrer beaucoup plus rapidement l'injectivité de l'application, mais cette preuve ne nous donnerait pas la surjectivité.

On va maintenant montrer que Q est non seulement bijective mais est un homéomorphisme, mais pour quelles topologies ? $Q(E/V)$ est un espace vectoriel réel, on lui choisit alors immédiatement la topologie de $\mathbb{R}^N$. Pour ce qui est de $\mathcal{L}_V(E)$, on doit passer par ce que l'on appelle les Grassmanniennes.

Informellement, la Grassmannienne $\mathrm{Gr(k, V)}$ est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k dans V un espace vectoriel de dimension finie.

Il y a plusieurs façons de définir formellement les Grassmanniennes, pour leur donner différentes structures (espaces métriques, variétés différentielles, variétés algébriques ...). Ici on ne prétend pas donner un cours de géométrie algébrique, on se contentera de montrer que $\mathrm{Gr}(k, \mathbb{R}^n)$ est un espace métrique compact, et on choisira le chemin le plus court pour le montrer.

Définition-Proposition 3.11. *Pour V un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire, la Grassmannienne $\mathrm{Gr}(k, V)$ se définit comme l'ensemble des projections orthogonales de trace k : $\{\Pi \in \mathrm{End}(V) |\ \Pi = \Pi^2 = \Pi^T, \mathrm{tr}(\Pi) = k\ \}$.*

Muni de la norme d'opérateur $d(\Pi_1, \Pi_2) := \|\Pi_1 - \Pi_2\|$, c'est un espace métrique compact séparé.

Démonstration. À partir du produit scalaire de V, pour un sous-espace vectoriel w de dimension k (que l'on peut définir formellement comme un élément de l'ensemble des k-uplets de vecteurs de V quotienté par la relation "engendrer le même sous-espace vectoriel", ce que l'on n'utilisera jamais), on définit son unique supplémentaire orthogonal, puis on peut définit l'unique projection orthogonale qui a pour image w et noyau $w^\perp$, qui dans la bonne base aura pour matrice une diagonale par bloc composé par un bloc identité de taille $k \times k$ et un bloc nul, donc a trace k.

Réciproquement un projecteur orthogonal de trace k définit par son image un unique sous-espace vectoriel de dimension k.

La topologie de la Grassmannienne ainsi définie découle de la topologie des applications linéaires sur V, de plus on a alors que $\mathrm{Gr}(k,V) = \{\Pi |\ \Pi = \Pi^2\} \cap \{\Pi |\ \Pi = \Pi^T\} \cap \{\Pi |\ \mathrm{tr}(\Pi) = k\}$, $X \to X - X^2$, $X \to X - X^T$, $X \to \mathrm{tr}(X) - k$ sont des applications continues, $\{0\}$ est un fermé, donc $\mathrm{Gr}(k,V)$ est fermé dans $\mathrm{End}(V)$. Et pour Π dans $\mathrm{Gr}(k,V)$, $\mathrm{tr}(\Pi\ \Pi^T) = \mathrm{tr}(\Pi) = k$, $\mathrm{tr}(AB)$ est aussi une norme sur $\mathrm{End}(V)$, qui borne alors la Grassmannienne, puis par équivalence des normes en dimension finie, on déduit que c'est aussi le cas de la norme d'opérateur. Enfin la grassmannienne est fermée bornée en dimension finie, donc compacte. La séparation découle de celle de $\mathrm{End}(V)$. □

$\mathcal{L}_V(E)$ est donc munie de la topologie induite. C'est un sous-ensemble de ce que l'on appelle usuellement la Grassmannienne lagrangienne : l'ensemble des sous-espace lagrangiens d'un espace vectoriel symplectique.

Proposition 3.12. *Pour la topologie d'espace vectoriel réel de $Q(E/V)$, et la topologie induite sur $\mathcal{L}_V(E)$, pour L dans $\mathcal{L}_V(E)$, $Q(L,.)$ est un homéomorphisme.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $Q(L,.)$ est continue. En effet pour tout L_1 dans $\mathcal{L}_V(E)$, comme la Grassmannienne est compacte et métrique, il existe un voisinage compact de L_1 inclue dans l'ouvert $\mathcal{L}_V(E)$. $Q(L,.)$ restreint du voisinage compact à son image est alors une fonction continue et bijective entre un espace topologique compact et un espace topologique séparé, donc est un homéomorphisme. Puis $Q(L,.)$ est alors une bijection et un homéomorphisme local, donc un homéomorphisme global.

Montrons donc que pour tout L_1 dans $\mathcal{L}_V(E)$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall L_2 \in \mathcal{L}_V(E), d(\Pi_1, \Pi_2) \leq \eta \Rightarrow \|Q(L,L_1) - Q(L,L_2)\| \leq \varepsilon$$

On rappel pour la clarté de la preuve : $\Pi_i : E \to L_i$ est la projection orthogonale sur L_i, $\pi : E \to E/V$ est la projection sur le quotient, $l_i : E/V \to L_i$, $l : E/V \to L$ sont des isomorphismes d'espaces vectoriels, et $\Omega : E^2 \to \mathbb{R}$ est bilinéaire.

On a tout d'abord, pour x dans E/V :

$$|\Omega(l(x), l_1(x)) - \Omega(l(x), l_2(x))| = |\Omega(l(x), (l_1 - l_2)(x))| \leq \|\Omega\|_{\mathrm{op}}\ \|l(x)\|_E\ \|l_1 - l_2(x)\|_E \leq \|\Omega\|_{\mathrm{op}} \|l\|_{\mathrm{op}} \|x\|_{E/V} \|l_1 - l_2\|_{\mathrm{op}} \|x\|_{E/V}$$

Ce calcul est valide quel que soit le choix fait pour les normes de E/V et E, puisque les applications Ω et l_i sont linéaires entre espaces vectoriels de dimension finies (on prendra tout de même garde au fait que les normes d'opérateurs de Ω et l_i ne sont pas les mêmes).

La preuve repose alors sur le fait de contrôler $\|l_1 - l_2\|_{\mathrm{op}}$ par $\|\Pi_1 - \Pi_2\|_{\mathrm{op}}$ (encore une fois ce ne sont pas les mêmes normes d'opérateurs). Ce qui semble naturel puisque ce sont deux manières de mesurer la "distance" entre les sous-espaces vectoriels L_1 et L_2.

Pour ce faire, on commence par définir les projections obliques suivantes :

On a $E = V \oplus L_i$, donc pour tout x dans E, on écrit de façon unique $x = y + u$, y dans V, u dans L_i. On a $u = l_i(\pi(x))$, en effet $l_i(\pi(x))$ est l'unique élément de L_i tel que $\pi(l_i(\pi(x))) = \pi(x)$, et $\pi(x) = \pi(y) + \pi(u) = \pi(u)$ car y est dans V.

y est définit uniquement, on peut alors poser $P_i \coloneqq E \to V : x \to y$. On a alors $l_1(\pi(x)) - l_2(\pi(x)) = x - P_1(x) - x + P_2(x) = P_2(x) - P_1(x)$. Essayons alors de contrôler $\|P_1 - P_2\|_{\text{op}}$.

On pose une base de E comme la concaténation des bases $\{v_j\}$ de V et $\{e_j^i\}$ de L_i. Dans cette base la matrice de P_i s'écrit $I' \coloneqq \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Puis en changent de base vers la base canonique, en notant $A_i = (V \mid L_i)$ la matrice alignant les colonnes v_j et e_j^i, on trouve que la matrice de P_i est $A_i I' A_i^{-1}$. On vient d'écrire en une même base les matrices des deux P_i, on peut donc calculer :

$$\text{Mat}(P_1) - \text{Mat}(P_2) = A_1 I' A_1^{-1} - A_2 I' A_2^{-1} = (A_1 - A_2) I' A_1^{-1} + A_2 I'(A_1^{-1} - A_2^{-1}) = (A_1 - A_2) I' A_1^{-1} + A_2 I A_1^{-1}(A_2 - A_1) A_2^{-1}$$
$$\text{Donc } \|P_1 - P_2\| \leq \|A_1 - A_2\| \, \|I'\| \, \|A_1^{-1}\| + \|A_2\| \, \|I'\| \, \|A_1^{-1}\| \, \|A_2 - A_1\| \, \|A_2^{-1}\| = (\|A_1^{-1}\| + \|A_2\| \, \|A_1^{-1}\| \, \|A_2^{-1}\|)(\|A_1 - A_2\|) = C\|A_1 - A_2\|$$

Or les A_i sont les matrices $(V|L_i)$, donc pour L_1 proche de L_2 pour la distance de la Grassmannienne, $\|A_1 - A_2\|$ est petit (on compose par les bons vecteurs dans l'inégalité $\|\Pi_1 - \Pi_2(x)\| \leq \eta\|x\|$), soit $\|\Pi_1 - \Pi_2\| \to 0$ implique $\|A_1 - A_2\| \to 0$, puis $\|l_1 - l_2\| \to 0$, puis $\|Q(L, L_1) - Q(L, L_2)\| \to 0$. □

On trouve alors immédiatement que pour tout L, $Q(., L)$ est aussi continue.

Proposition 3.13. *Soit (E, Ω) un espace vectoriel symplectique et V un sous-espace lagrangien fixé. On a pour tout L_1, L_2, L_3 dans $\mathcal{L}_V(E)$:*

$$Q(L_1, L_2) = -Q(L_2, L_1)$$
$$Q(L_1, L_3) = Q(L_1, L_2) + Q(L_2, L_3)$$

Démonstration. Le premier point découle de l'antisymétrie de Ω.

Pour le deuxième point, on pose pour $i = 1, 3$, $v_i(x)$ les vecteurs tel que $l_3(x) = l_2(x) + v_3(x)$, $l_1(x) = l_2(x) + v_1(x)$. On sait que $l - l'$ est à valeur dans V, donc ici les $v_i(x)$ sont dans V. Puis

$$Q(L_1, L_2)(x) + Q(L_2, L_3)(x) = \Omega(l_2(x) + v_1(x), l_2(x)) - \Omega(l_2(x) + v_3(x), l_2(x)) = \Omega(v_1(x) - v_3(x), l_2(x))$$

D'autre part

$$Q(L_1, L_3)(x) = \Omega(l_1(x), l_3(x)) = \Omega(v_1(x) + l_2(x), v_3(x) + l_2(x)) = \Omega(v_1(x), l_2(x)) + \Omega(l_2(x), v_3(x)) = \Omega(v_1(x) - v_3(x), l_2(x))$$

On conclut bien $Q(L_1, L_2) + Q(L_2, L_3) = Q(L_1, L_3)$. □

On peut maintenant construire les fibrés de Green. Ici on se restreindra au cas où le Hamiltonien est de Tonelli (en particulier complet), et indépendant du temps, on mentionne que certain de résultat s'étendent au cas où le Hamiltonien est périodique.

On notera alors pour ϕ le flot du Hamiltonien $\phi_t^{t'} = \phi_{t'-t}$.

Pour ne pas nous confondre dans les notations, on notera encore X un variété différentielle de dimension n, $M \coloneqq T^*X$ son fibré cotangent munie de la forme symplectique canonique . On notera x un élément de X, et $y = (x, p)$ un élément de M.

On commence par fixer un point y de M, et par construire la "verticale" $V(y)$ sur T_yM.

Définition 3.14. *On pose* $V(y) = \ker(d_y\pi) = \{(0, v_p), v_p \in T_x^*X\} \subset T_yT^*X = T_yM$.

Proposition 3.15. *$V(y)$ est lagrangien dans T_yM.*

Démonstration. Soit ω la forme canonique, lu dans les cartes adaptées on a, pour $(0, v_p), (0, v'_p)$ dans $V(y)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & v_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v'_p \end{pmatrix} = (0)$$

Puis comme T_x^*X est de dimension n, c'est aussi la dimension de $V(y)$, et donc $V(y)$ est lagrangien. □

Définition 3.16. *Pour tout t dans $\mathbb{R}$, y dans M. On définit $G_t(y) \coloneqq d_{\phi_{-t}(y)}\phi_t(V(\phi_{-t}(y)))$.*

Cette définition peut aussi se poser pour un flot non indépendant du temps :

$$G_t(y) \coloneqq d_{\phi_{-t}(y)}\phi^0_{-t}(V(\phi_{-t}(y))).$$

Nous allons maintenant être amené à étudier des fonctions de la forme $t \to Q(L, G_t(y))$, et devoir démontrer entre autre que cette fonction (définie sur un sous-ensemble agréable de $\mathbb{R}$) est continue. Mais nous allons alors devoir définir un nouveaux type d'espace topologique ! En effet lorsqu'une fonction fait varier un sous-espace vectoriel dans un espace fixé, on utilise la topologie des Grassmanniennes, et quand on fait varier des espaces tangents à une variété différentielle, on utilise la topologie des fibrés vectoriels. Ici, on doit faire varier des sous-espaces vectoriels entre différents espaces tangents à la variété. On doit donc définir une topologie englobant "toutes les Grassmanniennes" continûment, une sorte de "fibré Grassmannien".

La généralisation (presque) directe du fibré tangent d'une variété est la structure de fibré vectoriel, où, informellement, on associe "au dessus" de chaque point de la variété un espace vectoriel, qui n'est plus nécessairement de la même dimension que la variété, et tel que toutes les fibres se recollent bien continûment.

Ici, on va avoir besoin d'encore un peu plus général : nos fibres vont êtres des Grassmanniennes, donc pas des espaces vectoriels ! On rappelle donc la définition de *fibré*.

On prendra garde aux problèmes de traduction, en effet la traduction anglaise de *fibré* est *fibre bundle*, du moins lorsqu'on traduit les pages Wikipédia du français à l'anglais. Pourtant ces deux mêmes pages, si bien elles sont assignées comme traduction l'une de l'autre, ne propose pas la même définition pour cet objet (la page française demande en plus à ce que sur la fibre F agisse un groupe topologique G). Dans notre cas, bien que nous appellerons cet objet par son nom français, on choisira la définition anglophone.

Définition 3.17. *Un fibré est la donné de (E, B, π, F), où E, B et F sont des espaces topologiques, π est une surjection continue de E dans B. On suppose que B est connexe.*

On demande que pour tout x dans B, il existe un voisinage U de x dans B tel qu'il existe un homéomorphisme $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times F$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & U \times F \\ & {\scriptstyle\pi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle proj_1} & \\ & U & \end{array}$$

On appelle E l'espace total, B la base, F la fibre, π la projection, une des application φ une trivialisation locale. On a en particulier que $\pi^{-1}(\{x\})$ est homéomorphe à F, donc on l'appelle fibre au dessus de x.

Définition-Proposition 3.18. *On appelle fibré Grassmannien l'ensemble*

$$\mathrm{Gr}(k, TM) \coloneqq \{(x, V) \mid x \in M, V \in \mathrm{Gr}(k, T_xM)\}.$$

On note $\pi : \mathrm{Gr}(k, TM) \to M : (x, V) \to x$ *la projection.*

On peut munir $\mathrm{Gr}(k, TM)$ *d'une topologie munissant* $(\mathrm{Gr}(k, TM), M, \pi, \mathrm{Gr}(k, \mathbb{R}^n))$ *d'une structure de fibré.*

Cette appellation n'est pas standard, ni cette notation. On prendra garde par ailleurs à la notation $\mathrm{Gr}(k, TM)$ puisque TM n'est pas un espace vectoriel et $\mathrm{Gr}(k, TM)$ n'est pas une Grassmannienne.

Démonstration. M est supposé connexe par hypothèse. π est immédiatement surjective.

On va d'abord trouver nos candidats pour le rôle de trivialisations locales, puis on les utilisera pour définir les ouverts de l'espace total. Le tout aura alors bien la structure voulue.

Soit (U, φ) une carte de M, pour tout x dans U, $d_x\varphi : T_xM \to \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme, et $d\varphi : TM_{|U} \to U \times \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme. De plus, $d_x\varphi$ envoie les éléments de $\mathrm{Gr}(k, T_xM)$ vers $\mathrm{Gr}(k, \mathbb{R}^n)$.

On pose alors :

$$\Phi : \mathrm{Gr}(k, TM)_{|U} = \{(x, V) \mid x \in U, V \in \mathrm{Gr}(k, T_xM)\} \to U \times \mathrm{Gr}(k, \mathbb{R}^n) : (x, V) \to (x, d_x\varphi(V)).$$

Son inverse est directement $(x, W) \to (x, (d_x\varphi)^{-1}(W))$.

On définit alors les ouverts de l'espace total comme les sous ensembles $\mathcal{O}$ tel que pour toute application Φ, $\Phi(\mathcal{O} \cap \pi^{-1}(U))$ est un ouvert de $U \times \mathrm{Gr}(k, \mathbb{R}^n)$ pour la topologie produit. On vérifie alors qu'on a bien une topologie en appliquant les propriétés ensemblistes pour chaque Φ.

Cette construction rend immédiatement toutes les Φ et Φ^{-1} continues. Et chaque Φ va bien d'un ensemble de la forme $\pi^{-1}(U)$ $(= \mathrm{Gr}(k, TM)_{|U})$ vers $U \times \mathrm{Gr}(k, \mathbb{R}^n)$.

De plus, pour U un ouvert de M, soit Φ_U l'application associé (puisqu'on construit Φ à partir d'une carte φ de M, on suppose au départ qu'on a bien tous les ouverts dans l'Atlas de M). Soit (x, V) un élément de $\pi^{-1}(U)$, on a $\Phi_U(x, V) = (x, d_x\varphi(V)) = (\pi(V), d_{\pi(V)}\varphi(V))$, puis alors $\mathrm{proj}_1 \circ \Phi_U(x, V) = \pi(V)$. On a bien le diagramme commutatif voulu, et puisqu'on a immédiatement proj_1 continue pour les topologies respectives, on trouve par composition que $\mathrm{proj}_1 \circ \Phi = \pi$ est continue. □

On déduit de cette construction que pour X un espace topologique, $f : X \to \mathrm{Gr}(n, TM)$, f est continue si et seulement si pour tous les Φ, les $\Phi \circ f$ sont continues.

Proposition 3.19. *L'application* $\mathbb{R}_+^* \to \mathrm{Gr}(n, TM) : t \to G_t(y)$ *est continue. Puis pour* L *un Lagrangien de* T_yM, $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} : t \to Q(L, G_t(y))$ *est continue. Puis* $(\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R} : (t, t') \to Q(G_t(y), G_{t'}(y))$ *est continue pour la topologie produit.*

Démonstration. On commence par montrer que $M \to \mathrm{Gr}(n, TM) : y \to V(y)$ est continue. On choisit une carte (U, φ) en y, on note les coordonnées locales (x_i, p_i). Dans cette carte notre application devient $y \in U \to \mathrm{Vect}(\{\partial p_i\}_i) \in \mathrm{Gr}(n, T_yM)$ (On identifiera selon le cas $y \to V(y) \in \mathrm{Gr}(n, T_yM)$ et $y \to (y, V(y)) \in \mathrm{Gr}(n, TM)$).

On va composer par Φ_U, on remarque que pour tout $y \in U$, $\Phi_U(y, \partial p_i) = (y, d_y\varphi(\partial p_i)) = (y, e_i) \in U \times \mathbb{R}^n$. Soit quelque soit y, le résultat suivant la deuxième composante est le même (on a construit Φ_U à partir de φ exprès pour), en particulier pour tout y dans U, $\Phi_u(y, \mathrm{Vect}(\{\partial p_i\}_i))$ est constant selon la deuxième coordonné, donc l'application $y \to \Phi_U(y, V(y))$ est à fortiori continue.

Ceci étant vrai pour tout les Φ_U avec U voisinage de y, on conclut que $y \to V(y)$ est continue.

Ensuite, $t \to \phi_t(y)$ est lisse, $(t, y) \to d_y\phi_t$ est lisse donc $(t, y) \to d_y\phi_t(V(y))$ est continue, puis enfin par composition $t \to d_{\phi_{-t}(y)}\phi_t(V(\phi_t(y))) = G_t(y)$ est continue.

Par 3.12, on a que $Q(L, .)$ est continue de $\mathcal{L}_{V(y)}(T_yM)$ dans $\mathbb{R}$, donc en composant on trouve la continuité de $t \to Q(L, G_t(y))$.

Enfin, $Q(G_t(y), G_{t'}(y)) = Q(G_t(y), L) + Q(L, G_{t'}(y))$, le premier terme étant constant pour t' et continue pour t, il est continue pour la topologie produit, et de manière analogue le deuxième terme est aussi continue pour la topologie produit, on peut alors conclure. □

Définition 3.20. *Pour y dans M, on dit que son orbite est sans point conjugué si :*

$$\forall t, t' \in \mathbb{R}, t \neq t',\ d_{\phi_t(y)}\phi_t^{t'}(V(\phi_t(y))) \cap V(\phi_{t'}(y)) = \{0\}$$

$V(\phi_t(y))$ est inclus dans $T_{\phi_t(y)}M$, donc en composant par la différentielle du flot au point $\phi_t(y)$ on vérifie bien que les deux ensembles de la définition 3.20 sont dans le même espace tangent de M, et donc bien comparable.

Le but va être maintenant d'associer aux couples de $G_t(y)$ des formes quadratiques par l'application Q, de faire "converger" les formes quadratiques à partir des résultats montrés dans la section 3.1, puis de repasser par l'inverse de Q pour faire converger des sous-espaces inclue dans un tangent de M. Ces convergences se feront en temps positif et négatifs, et ces deux sous-espaces limites seront les fibrés de Green.

Dans les preuves qui suivent nous aurons besoin de deux résultats classiques sur les formes quadratiques

Proposition 3.21. *Toute forme quadratique sur un espace vectoriel réel de dimension n peut s'écrire dans une certaine base sous la forme $q(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i^2 + \sum_{i=p+q+1}^{n} 0$. On note alors sa signature $(p, q, n-p-q)$. Lorsque q est non dégénérée, sa signature $(p, n-p, 0)$ est simplement noté $(p, n-p)$.*

La démonstration se fait (comme la plupart des preuves de réduction) par récurrence sur la dimension, en décomposant l'espace en deux sous-espaces plus petits puis en y appliquant l'hypothèse de récurrence.

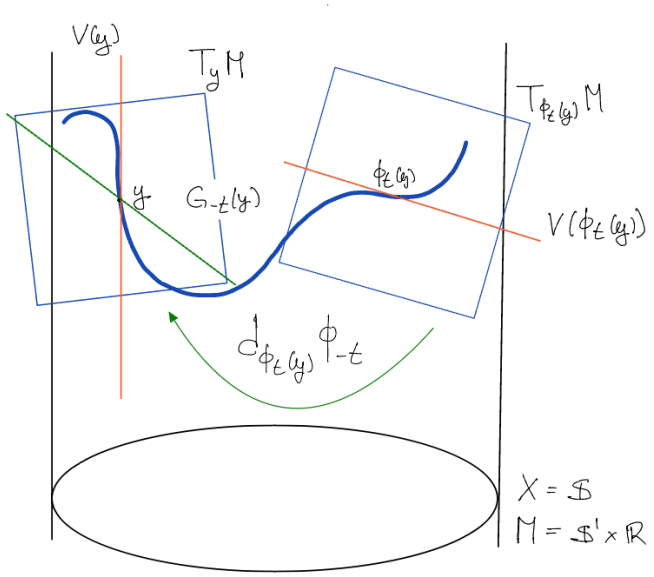
Une forme quadratique définie positive (resp. négative) a donc signature $(n, 0)$ (resp. $(0, n)$).

Proposition 3.22. *La signature d'une forme quadratique non dégénérée est localement constante.*

L'idée pour la construction est la suivante, on regarde le déplacement de la verticale le long de l'orbite y quand le temps s'écoule, et à chaque instant on ramène la verticale "du temps t" par l'inverse de la différentielle du flot (avec les paramètres adaptés pour que le calcul fasse sens) sur l'espace tangent au temps initial.

Cela revient alors à voir la verticale "bouger" dans l'espace tangent du temps initial au cours du temps. Le fait de ne pas avoir de points conjugués se traduit alors par le fait que la verticale ne "change pas de sens" dans son mouvement, puis cela impliquera une convergence.

Cette construction peut se faire en défilant le temps vers le futur ou vers le passé, nous donnant alors deux limites, les deux fibrés de Green.



Remarque 3.23. *Dans cette figure, puisque X est de dimension 1, les fibrés sont des droites, donc avoir une intersection non triviale revient à être égaux, ce qui n'est plus le cas en dimension supérieure.*

Théorème 3.24. *Pour y dans M sans points conjugué, on a :*

- *pour tout $t \neq 0$, $G_t(y)$ est transverse à $V(y)$*
- *pour tout t, t' réels tel que $0 < t < t'$ (resp. $0 > t > t'$, resp. $t < 0 < t'$), on a $Q(G_t(y), G_{t'}(y)) \ll 0$ (resp. $Q(G_t(y), G_{t'}(y)) \gg 0$, resp. $Q(G_t(y), G_{t'}(y)) \gg 0$).*

Démonstration. Pour le premier points, il suffit de d'écrire la définition d'orbite sans points conjugué pour les temps $t' = 0, t = -u$ (puis renommer u en t).

De même, en partant de la définition de ne pas avoir de points conjugués, en choisissant des temps $-t, -t'$, puis en appliquent $d_{\phi_{-t'}(y)}\phi_{t'}$, puisque

$$d_{\phi_{-t'}(y)}\phi_{t'} \circ d_{\phi_{-t}(y)}\phi_{t-t'} = d_{\phi_{-t}(y)}\phi_t$$

on trouve donc exactement $G_t(y) \cap G_{t'}(y) = \{0\}$, donc par 3.10, les $Q(G_t(y), G_{t'}(y))$ sont non dégénérées. On a vu que l'application $(t, t') \to Q(G_t(y), G_{t'}(y))$ est continue là ou elle est définie, soit pour t, t' non nuls. Sur un ensemble convexe comme $\{(t, t'), 0 < t < t'\}$ (resp. les deux autres cas), puisque la signature d'une forme quadratique non dégénérée est localement constante, on

déduit que la signature des $Q(G_t(y), G_{t'}(y))$ est constante sur ce domaine. On va donc montrer que dans ce domaine la signature d'une de ces formes quadratiques est $(0, n)$ (resp. $(n, 0)$, $(n, 0)$), soit que la forme quadratique est définie négative (resp. positive, positive), puis ce résultat s'étendra à tout le domaine.

Pour ça, on écrit les équations de Hamilton, et on les linéarise. Pour un voisinage d'un point y dans M, une carte de la forme $(\partial x_i, \partial p_i)$:

$$X_H = \sum_i (\tfrac{\partial H}{\partial p_i}\ \partial x_i - \tfrac{\partial H}{\partial x_i}\ \partial p_i).$$

Le flot hamiltonien vérifie pour tout t :

$$\begin{cases} \frac{d\phi_t}{dt}(y) = X_H(\phi_t(y)) \\ \phi_0(y) = y \end{cases}$$

Soit v un vecteur dans T_yM, posons

$$z(t) \coloneqq d_y\phi_t(v) \in T_{\phi_t(y)}M$$
$$z'(t) = \tfrac{d}{dt}(d_y\phi_t(v)) = d_y(\tfrac{d}{dt}(\phi_t)(v)) = d_y(X_H \circ \phi_t)(v) = d_{\phi_t(y)}X_H \circ d_y\phi_t(v) = d_{\phi_t(y)}X_H \circ z(t)$$

En coordonnées locales : $X_H(x,p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p}(x,p) \\ -\frac{\partial H}{\partial x}(x,p) \end{pmatrix}$

Donc $d_yX_H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p} & \frac{\partial^2 H}{\partial^2 p} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial^2 x} & -\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p} \end{pmatrix}$

L'idée va être d'approximer l'EDO, puis faire tendre t et t' vers 0 pour trouver un point où notre matrice est définie négative, puis conclure.

On fait le développement de Taylor de z à l'ordre 1 :

$$z(t) = z(0) + tz'(0) + o(t) = v + td_{\phi_t(0)}X_H(v) + o(t) = v + td_yX_H(v) + o(t).$$

Si on note $M_t(y) = \mathrm{Mat}_{(x_k,p_k)}(d_y\phi_t) = \begin{pmatrix} a_t & c_t \\ b_t & d_t \end{pmatrix} = I + t\begin{pmatrix} H_{xp} & H_{pp} \\ -H_{xx} & H_{xp} \end{pmatrix} + o(1)$

On a alors $\begin{cases} a_t = I + tH_{xp} + o(t) = I + o(1) \\ d_t = I - tH_{xp} + o(t) = I + o(1) \\ c_t = tH_{pp} + o(t) \\ b_t = -tH_{xx} + o(t) \end{cases}$

Les a_t etc. sont des fonctions du temps et de l'espace, on doit donc appliquer ces équivalents en un point y, mais ces équivalents sont uniformes sur un voisinage compact de y.

Pour $t \neq 0$ assez petit, comme $V(y) = \ker d_y\pi$, dans la carte (x_i, p_i), un vecteur dans $V(y)$ s'écrit $\begin{pmatrix} 0 \\ v_p \end{pmatrix}$, puis

$$\begin{pmatrix} a_t & c_t \\ b_t & d_t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ v_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_tv_p \\ d_tv_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_p \\ d_t(c_t)^{-1}\tilde{v}_p \end{pmatrix} \text{ avec } \tilde{v}_p = c^tv_p$$

Ce sont les conditions de Tonelli sur le Hamiltonien, puis le flot qui font que $tH_{pp}(y) + o(t)$ reste bien définie positive pour tout t petit, puis les c_t sont bien inversibles.

Donc on peut écrire $d_y\phi_t(V(y))$ comme le graphe d'un sous-espace vectoriel par l'application $d_t(c_t)^{-1} \sim (\frac{1}{t})(H_{pp}(y))^{-1}$, et par symétrie et inversibilité, si $t > 0$, resp. < 0, $(\frac{1}{t})(H_{pp}(y))^{-1}$ est définie positive, resp. négative.

On rappelle que $T_yM \simeq T_xX \oplus T_p(T_x^*X)$. Soit $Z(y) = \mathrm{Vect}(\partial x_i(y))$ dans T_yM le sous-espace lagrangien "horizontal".

On a $c_t : V \to Z$, $d_t : V \to V$, donc $d_t(c_t)^{-1} : Z \to V$. On a $T_yM \simeq Z(y) \oplus V(y)$, $T_yM/V(y) \simeq Z(y)$, et comme $d_y\phi_t(V(y))$ est le graphe de $d_t(c_t)^{-1}$, $G_t(y)$ s'écrit de façon unique comme $\{l(u) + d_t(c_t)^{-1}(l(u)), u \in T_yM/V(y)\}$ par 3.9. Et comme dans la preuve 3.10, la forme bilinéaire associé à $Q(Z(y), G_t(y))$ est $\Omega(l(u), d_t(c_t)^{-1}(l(u)))$ pour u dans $T_yM/V(y)$.

Lorsqu'on écrit la matrice de cette forme symétrique dans la base de l'espace quotient découlant de la base formé par la somme directe de l'horizontale et la verticale, c'est à dire dans la base $(\partial x_i + V(y))$, on trouve la matrice $d_t(c_t)^{-1}$. Donc finalement par l'équivalent trouvé précédemment :

$$Q(Z(y), G_t(y)) \sim \tfrac{1}{t}(H_{pp}(y))^{-1}, \text{ puis}$$
$$Q(G_t(y), G_{t'}(y)) = Q(Z(y), G_{t'}(y)) - Q(Z(y), G_t(y)) \sim (\tfrac{1}{t'} - \tfrac{1}{t})(H_{pp}(y))^{-1}$$

Et on a vu que $(H_{pp}(y))^{-1}$ est définie positive, donc le caractère défini positif ou négatif est décidé par le signe de $\frac{1}{t'} - \frac{1}{t}$, qui correspond bien à ce qu'on veut démontrer dans chacun des trois cas. □

Cet preuve de citer Arnaud généralise alors le cas où le flot est seulement géodésique, soit où le Hamiltonien est de la forme $H : M \to \mathbb{R} : (x, p) \to \frac{1}{2}p^2$.

Corollaire 3.25. *Sous les mêmes hypothèses (toujours pour un Hamiltonien indépendant du temps), on peut alors définir* $G_-(y) \coloneqq \lim_{t\to-\infty} G_t(y)$ *et* $G_+(y) \coloneqq \lim_{t\to+\infty} G_t(y)$.

Ce sont des sous-espaces lagrangiens de T_yM*, vérifiant*

— $Q(G_+(y), G_-(y)) \prec 0$

— *pour tout* t *réel,* $G_-(\phi_t(y)) = d_y\phi_t(G_-(y))$, $G_+(\phi_t(y)) = d_y\phi_t(G_-(y))$

Les fibrés de Green sont donc ces G_- et G_+, $G_-(y)$ et $G_+(y)$ les fibres au dessus de y.

Démonstration. On fait la preuve dans le cas $\{0 < t < t'\}$, les autres cas sont analogues.

On commence par fixer t_0, on pose alors $q_t \coloneqq Q(G_{t_0}(y), G_t(y))$, $\{q_t\}_{t\in]t_0,\infty[}$ est une famille croissante de forme quadratique sur $T_yM/V(y)$, en effet $Q(G_{t_0}, G_t) + Q(G_t, G_{t'}) = Q(G_{t_0}, G_{t'})$ avec $Q(G_t, G_{t'}) \ll 0$. Et aussi pour tout t, $Q(G_{t_0}, G_t)(.) \leq 0$.

On applique alors les résultats de la section 3.1 pour définir la forme quadratique $q^{t_0}(v) \coloneqq \sup_{t>t_0} q_t(v)$ sur $T_yM/V(y)$.

Par la proposition 3.10, $Q(G_{t_0}, .) : \mathcal{L}_V(T_yM) \xrightarrow{\sim} Q(T_yM/V(y))$ est une bijection, donc $Q(G_{t_0}, .)^{-1}(q^{t_0})$ est un espace lagrangien de T_yM, qu'on va noter $G_+^{t_0}$.

On va alors montrer que pour tout t_0' dans $]0, \infty[$, $G_+^{t_0} = G_+^{t_0'}$ pour justifier qu'on peut bien définir sans ambiguïté la fibre positive au dessus de y $G_+(y)$.

Pour simplifier les notations, on omettra le point y, toutes les fibres sont prises au dessus de y.

Soit t_0 et s_0 dans $]0, \infty[$, et q^t, q^s les formes quadratiques "limites" construites à partir de $\{Q(G_{t_0}, G_t)\}_t$ et $\{Q(G_{s_0}, G_t)\}_t$ respectivement.

En écrivant $Q(G_{s_0}, G_t) = Q(G_{s_0}, G_{t_0}) + Q(G_{t_0}, G_t)$, et en passant au sup, on trouve $q^s = Q(G_{s_0}, G_{t_0}) + q^t$.

$$\text{Et } \begin{cases} Q(G_{t_0}, .)^{-1}(q^t) = G_+^{t_0} \\ Q(G_{s_0}, .)^{-1}(q^s) = G_+^{s_0} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} Q(G_{t_0}, G_+^{t_0}) = q^t \\ Q(G_{s_0}, G_+^{s_0}) = q^s = q^t + Q(G_{s_0}, G_{t_0}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q(G_{s_0}, G_+^{s_0}) = Q(G_{t_0}, G_+^{t_0}) + Q(G_{s_0}, G_{t_0}) = Q(G_{s_0}, G_+^{t_0}) \Leftrightarrow Q(G_+^{s_0}, G_+^{t_0}) = 0$$

Or comme pour L lagrangien $Q(L, L) = 0$, par bijectivité de $Q(L, .)$, $Q(L, X) = 0$ impliques $L = X$.

Soit ici $G_+^{s_0} = G_+^{t_0}$. On conclut qu'on peut bien définir G_+ indépendamment du "temps de départ" t_0.

Pour le deuxième point, pour $t < 0 < t'$ on a :

$$0 \gg Q(G_+, G_-) = Q(G_+, G_a) + Q(G_a, G_b) + Q(G_b, G_-), \text{ pour } a < 0 < b$$

Par définition de $G_\pm$ comme image réciproque par Q de la forme quadratique sup, on a $Q(G_+, G_a)(v) = \sup_{t\in]a,\infty[} Q(G_t, G_a)(v)$, et on peut trouver un t tel que $Q(G_t, G_a)(v)$ soit strictement inférieur à 0 pour tout v non nul et égal à 0 sinon par le théorème 3.24, puis $Q(G_+, G_a) \ll 0$. De la même manière, on trouve que $Q(G_b, G_-) \ll 0$. $Q(G_a, G_b) \ll 0$ découle directement de 3.24.

Puis on aligne les relations d'ordre pour obtenir le résultat voulu.

Remarque 3.26. *Ici on a pas utilisé de notion topologique, on a utilisé les résultat de la section 3.1 pour construire un sup sur les formes quadratiques, puis on s'est ramené sur l'espace des sous-espaces lagrangiens par l'inverse de Q, la notation* lim *semble être un abus de langage, mais en fait puisque la notion de sup pour la relation d'ordre définie dans 3.1 est compatible avec la topologie des formes quadratiques, on peut choisir une suite de formes quadratiques qui tendent au sens habituel vers ce sup, puis par continuité de Q^{-1}, on trouve une limite au sens habituel, qui correspond bien aux fibrés $G_\pm$.*

On précise ce fait car pour le dernier point de la proposition, on a besoin (ou tout du moins la démonstration est plus limpide) de la continuité de Q et la topologie des deux espaces, pour pouvoir faire des passages à la limite et des interversions limite/fonctions continues.

En utilisant le fait que les "limites" sont bien au sens de la topologie du fibré Grassmannien, et que $t \to d_y\phi_t$ est bien continue de $\mathbb{R} \times \mathrm{Gr}(k, TM)$ dans $\mathrm{Gr}(k, TM)$, on a (les limites sont prises en $-\infty$) :

$$d_y\phi_s(G_-(y)) = d_y\phi_s(\lim G_{t-s}(y)) = \lim d_y\phi_s(G_{t-s}(y))$$

et

$$\begin{aligned} &d_{\phi_{t-s}\phi_{-t+s}(y)}\phi_s \circ d_{\phi_{-t+s}(y)}\phi_{t-s}(V(\phi_{-t+s}(y))) = d_{\phi_{-t+s}(y)}\phi_s \circ \phi_{t-s}(V(\phi_{-t+s})(y)) \\ &= d_{\phi_{-t+s}(y)}\phi_t(V(\phi_{-t+s})(y)) = d_{\phi_{-t}\phi_s(y)}\phi_t(V(\phi_{-t}\phi_s(y))) = G_t(\phi_s(y)) \to G_-(\phi_s(y)) \end{aligned}$$

Soit $d_y\phi_s(G_-(y)) = G_-(\phi_s(y))$. On fait de même pour le cas $+\infty$. □

Comme les fibrés de Green sont les images d'une forme quadratiques par l'application inverse de Q, on en déduit aussi qu'ils sont lagrangiens transverses à la verticale.

On va maintenant démontrer un critère nous permettant de savoir si un vecteur tangent à y dans M est dans le fibré de Green de l'espace tangent en y. Ce sera un premier résultat nous indiquant que les fibrés de Green décrivent le comportement dynamique des orbites sur la variété M.

Théorème 3.27 (Critère dynamique d'appartenance aux fibré de Green)**.** *Soit y dans $T^*X = M$ un point dont l'orbite est relativement compacte et sans point conjugué, soit v dans T_yM, on a*

$$\text{si } v \notin G_-(y), \text{alors } \lim_{n\to+\infty} \|d_y\pi \circ \phi_n(v)\| = \infty$$
$$\text{si } v \notin G_+(y), \text{alors } \lim_{n\to+\infty} \|d_y\pi \circ \phi_{-n}(v)\| = \infty$$

Avant de s'attaquer à la preuve du critère dynamique, on à besoin du lemme suivant.

Lemme 3.28. *Soit X une variété compacte dont le flot hamiltonien sur $M = T^*X$ est de Tonelli. L'ensemble des points dont l'orbite est sans points conjugués est fermé.*

Démonstration. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des points dont l'orbite possède des points conjugués et on montre que c'est un ouvert.

Soit y_0 dans $\mathcal{C}$, il existe $t_0 \neq t_0'$ et v dans $V(\phi_{t_0}(y_0))$ tel que $w_0 \coloneqq d_{\phi_{t_0}(y_0)}\phi_{t_0'-t_0}(v_0)$ soit dans $V(\phi_{t_0'}(y_0))$. Le flot varie lissement en fonction de (y,t), et on a vu que la verticale V varie continûment le long du fibré. Donc $F(y,t,t',v) \coloneqq \text{dist}(d_{\phi_t(y)}\phi_{t'-t}(v), V(\phi_{t'}(y)))$, avec dist la distance usuelle sur l'espace vectoriel tangent, varie continûment en fonction de ses paramètres. On a $F(y_0,t_0,,t_0',v_0) = 0$, donc par continuité de F, dans un voisinage assez petit de (y_0,t_0,t_0',v_0) (pour la topologie produit de TM et deux fois $\mathbb{R}$), on peut choisir $(y,\tilde{t},\tilde{t}',v)$ tel que $F(y,\tilde{t},\tilde{t}',v)$ soit arbitrairement petit.

On peut choisir en particulier un voisinage U tel que pour tout y dans U, un vecteur v_y dans $V(\phi_{\tilde{t}}(y))\backslash\{0\}$ assez proche du transporté de v_0, vérifie $d_{\phi_{\tilde{t}(y)}\phi_{\tilde{t}'-\tilde{t}}(v_y)\in V(\phi_{\tilde{t}'}(y))}$.

En effet, $F(y,t,t',.)$ est une application linéaire. Si pour (y_0,t_0,t_0') elle a un noyau non trivial, alors par continuité et par compacité d'une sphère unité on obtient pour y voisin de y_0 un vecteur v_y proche de v annulant encore la projection sur le complémentaire. Soit la propriété d'avoir un vecteur envoyé exactement dans la verticale est stable par petites perturbations.

On a donc montré que pour y suffisamment proche de y_0, y possède au moins un couple de temps $(\tilde{t}',\tilde{t})$ et un vecteur non nul v_y vérifiant $d_{\phi_{\tilde{t}(y)}\phi_{\tilde{t}'-\tilde{t}}(v_y)\in V(\phi_{\tilde{t}'}(y))}$, soit l'orbite de y admet des points conjugués, c'est-à-dire que y est dans $\mathcal{C}$, donc $\mathcal{C}$ est un ouvert. □

démonstration de 3.27. On démontre le premier cas, le deuxième est analogue.

Si l'orbite de y est relativement compacte, en choisissant un recouvrement finit par des ouverts puis en le projetant sur X, on trouve que l'orbite de $x = \pi(y)$ est aussi relativement compacte, dans X.

On recouvre alors la trajectoire de $\pi(y)$ par des cartes $(U_i,\varphi_i)_{0<i<N}$, avec $\varphi_i(x) = (x_1^i,\ldots,x_n^i)$. Puis à partir de ces cartes, on les complètes par les coordonnées duales sur T^*U_i en $\varphi_i^* = (x_1^i,\ldots,x_n^i,\xi_1^i,\ldots,\xi_n^i)$. (On est passé par le projeté puis remonté pour avoir des cartes de cette forme).

Sur chaque tangent, G_- est lagrangien transverse à la verticale, alors comme nous l'avons vu dans la preuve de 3.10, pour tout t, il existe une matrice symétrique $S^-(t)$ dont $G_-(\phi_t(y))$ est le graphe. Par le même raisonnement, il existe des matrices symétriques $S_1^-(t)$ et $S_1^+(t)$ dont respectivement $d_{\phi_{t-1}(y)}\phi_1(V(\phi_{t-1}(y)))$ et $d_{\phi_{t+1}(y)}\phi_{-1}(V(\phi_{t+1}(y)))$ sont les graphes.

Puisque l'ensemble des points dont l'orbite est sans points conjugués est fermé et qu'on suppose l'orbite de y relativement compacte, donc que son adhérence Γ est compacte, on peut définir les fibrés sur Γ entier. Comme $y \in \Gamma \to d_y\phi_1(V(y))$ et $y \in \Gamma \to d_y\phi_{-1}(V(y))$ sont continues et

transverses à la verticale, et comme on a un nombre fini de cartes, l'ensemble des matrices qu'on vient de définir forment une partie bornée. Et par les résultats de la section sur les comparaisons des espaces G_t, on a $S_1^- \ll S^-(t) \ll S_1^+$, et $\{S^-(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ est relativement compacte.

On va faire un changement de coordonnées convenables qui va nous permettre de démontrer la proposition par le calcul. On pose $P_t := \begin{pmatrix} Id & 0 \\ S^-(t) & Id \end{pmatrix}$. L'ensemble de ces matrices est uniformément borné. On vérifie immédiatement que $P_t^{-1} = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ -S^-(t) & Id \end{pmatrix}$. L'ensemble de ces matrices inverses est aussi uniformément borné.

On fait le changement de coordonnées suivant pour tout t : $P_t^{-1} T_{\phi_t(y)} M$. Par la définition de S^-, dans ces nouvelles coordonnées, G_- est l'horizontale, soit $T_{\phi_t(y)} M = G_-(\phi_t(t)) \oplus V(\phi_t(y))$.

Dans ces coordonnées, on note M_t la matrice de $d_y\phi_t$. On note $M_t = \begin{pmatrix} a_t & b_t \\ c_t & d_t \end{pmatrix}$.

Puisque G_- est invariant par la différentielle du flot (deuxième point de3.25), on a, pour un vecteur dans l'horizontale : $M_t(*\ \ 0)^T = (*\ \ 0)^T$, soit nécessairement $c_t = 0$.

On note S_n^- et S_n^+ les matrices symétriques dont respectivement $G_{-n}(y)$ et $G_n(\phi_n(y))$ sont les graphes. Puisque d'une part $G_n(\phi_n(y)) = M_n V(y)$, d'autre part $G_n(\phi_n(y)) = \Gamma_{S_n^+}$, on a :

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ 0 & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n v \\ d_n v \end{pmatrix}$$

Et $d_n v = S_n^+ b_n v$ par graphe, puis $d_n = S_n^+ b_n$.

De plus, M_n est une matrice symplectique, donc $-JM_nJ = M_n^{-1}$, et comme S_n^+ est symétrique :

$$-\begin{pmatrix} 0 & -Id \\ Id & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n^T & 0 \\ b_n^T & b_n^T S_n^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ Id & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n^T S_n^+ & -b_n^T \\ 0 & a_n^T \end{pmatrix}$$

On applique un raisonnement similaire à $G_{-n}(y) = M_{-n} V(y)$, et on a alors :

$$\begin{pmatrix} b_n^T S_n^+ & -b_n^T \\ 0 & a_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_n^T v \\ a_n^T v \end{pmatrix}$$

Donc finalement $a_n^T v = S_n^-(-b_n^T v)$ soit $a_n = -b_n S_n$, puis $M_n = \begin{pmatrix} -b_n S_n^- & b_n \\ 0 & S_n^+ b_n. \end{pmatrix}$.

G_- étant l'horizontale dans ces coordonnées, et comme on sait que $G_n(y) \to G_-(y)$, on trouve

$$\begin{pmatrix} * \\ S_n^- * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit $S_n^- \to 0$ pour $n \to +\infty$.

On reprend les mêmes notations $S_1^-(n)$ et $S_1^+(n)$ pour les matrices des endomorphismes correspondant, mais cette fois-ci dans nos nouvelles coordonnées. On a alors $0 \prec S_1^-(n) \ll S_n^+ \prec S_1^+(n)$, qui implique $0 \ll S_n^+ \prec S_1^+(n)$. Donc $(S_n^+)_n$ est une famille de matrices symétriques définies positives uniformément bornées.

On trouve alors qu'il existe une constante positive C tel que $0 \ll v^T S_n^+ v \ll C||v||^2$.

Puisque M_n est symplectique, on a $M_n^T J M_n = J$:

$$\begin{pmatrix} -S_n^- b_n^T & 0 \\ b_n^T & b_n^T S_n^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ b_n^T S_n^+ & -b_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b_n S_n^- & b_n \\ 0 & S_n^+ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & S_n^- b_n^T S_n^+ b_n \\ * & * \end{pmatrix} = J$$

Soit $S_n^- b_n^T S_n^+ b_n = -Id \Rightarrow (S_n^-)^{-1} = -b_n^T S_n^+ b_n$. On injecte cette formule dans la précédente : $-v^T (s_n^-)^{-1} v = v^T b_n^T S_n^+ b_n v \leq C||v||^2$.

On a vu que $(S_n) \to 0$, donc $v^T (S_n)^{-1} v \to \infty$, puis $||b_n v|| \to \infty$, et même :

$$\forall A > 0, \exists N > 0 : \forall v \in \mathbb{R}^{2n},\ n \geq N \Rightarrow ||b_n v|| \geq A||v||$$

Le caractère uniforme de cette limite vient de l'étude du spectre de S_n^- : on choisit sa plus petite valeur propre λ_n^0 (non nulle car la matrice est définie positive), qui devient la plus grande de $(S_n^-)^{-1}$, puis on majore dans le cas des vecteurs propres de $(\lambda_n^0)^{-1}$ qui permet de majorer uniformément.

On vient donc de montrer que pour $p_- : T(T^*X) \to T(T^*X)$ la projection sur G_- parallèlement à V, pour tout v dans $V(y)\backslash\{0\}$, $||p_- \circ d_y \phi_n(v)|| \to \infty$.

Il nous reste à étendre le résultat pour tous les vecteurs tangent.Soit alors v dans $T_y(T^*X)\backslash G_-(y)$, de coordonnées $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $p_- \circ d_y \phi_t(v) = b_n(v_2 - S_n^- v_1)$, or $(v_2 - S_n^- v_1) \to v_2 \neq 0$ (car $v \notin G_-(y)$) pour $n \to \infty$. Donc par le résultat de divergence uniforme, on a $||b_n(v_2 - S_n^- v_1)|| \to \infty$, soit $||p_- \circ d_y \phi_n(v)|| \to \infty$.

On revient maintenant dans les coordonnées initiales : $p_-(v_1, v_2) = (v_1, S_- v_1)$ et $d\pi(v_1, v_2) = v_1$. Comme S_- est uniformément bornée, la divergence de $||p_- \circ d_y \phi_n(v)||$ équivaut à celle de $||d_\pi \circ d_y \phi_n(v)||$, on peut conclure. □

3.3 Utilisations des fibrés de Green en dynamique

Maintenant que nous avons construit les fibrés de Green, nous allons voir certaines applications générales en dynamique hamiltonienne de ces fibrés, avant de nous intéresser plus spécifiquement au cas du problème des N-corps.

Définition 3.29. *Soit $f : M \to M$ un difféomorphisme sur une variété fermée M. On dit que f est partiellement hyperbolique si il existe une décomposition continue du tangent $TM = E^u \oplus E^c \oplus E^s$, où E^u et E^s sont non triviaux, et chaque composante est stable par df. Et si de plus*

$$||df|_{E^s}|| < 1,\ ||df|_{E^u}|| > 1,\ et$$
$$\forall x \in M,\ \forall v^i \in E^i,\ ||d_x f(v^s)|| < ||d_x f(v^c)|| < ||d_x f(v^u)||$$

Définition 3.30. *On dit que ϕ est un flot d'Anosov si on a la décomposition $TM = E^s \oplus <X> \oplus E^u$, où chaque composante est $d\phi_t$-invariante pour tout t, et si il existe des constantes $C, C', \lambda, \lambda' > 0$*

$$\forall v \in E^s,\ \|d\varphi^t(v)\| \leq Ce^{-\lambda t}\|v\|,$$
$$\forall v \in E^u,\ \|d\varphi^{-t}(v)\| \leq C'e^{-\lambda' t}\|v\|$$

On rappel que $<X>_x := \mathbb{R}X_x$.

En particulier, à chaque temps t, ϕ_t est un difféomorphisme partiellement hyperbolique. Et ici $E^c(y) = <X>_y$.

Proposition 3.31. *Soit X une variété compacte et H un Hamiltonien indépendant du temps sur T^*X, soit y dans T^*X un point dont l'orbite est non critique (non réduite à un point soit $X_H(y) \neq 0$), sans points conjugués et relativement compacte, alors $\mathbb{R}X_H(y) \subset G_-(y) \cap G_+(y)$.*

Démonstration. Le flot stabilise le champ de vecteur : $d_y\phi_t(X_H(y)) = X_H(\phi_t(y))$ pour tout temps t. On a supposé que l'orbite de y est relativement compacte, et le champ est une fonction lisse, donc $t \to ||X_H(\phi_t(y))||$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc $\sup_{t\in\mathbb{R}} ||d_y\phi_t(X_H(y))|| = \sup_{t\in\mathbb{R}} ||X_H(\phi_t(y))|| < \infty$

Puis comme $\pi : T^*X \to X$ est lisse, sa différentielle est lisse, et alors la borne uniforme de $\{d_y\phi_t(X_H(y))\}_{t\in\mathbb{R}}$ implique celle de $\{d_{\phi_t(y)}\pi \circ d_y\phi_t(X_H(y))\}_{t\in\mathbb{R}}$, on applique alors la contraposée des deux points du critère dynamique. □

Proposition 3.32. *Soit X une variété compacte et H un Hamiltonien sur T^*X. Soit K une partie relativement compacte, invariante et sans points conjugués telle que le flot hamiltonien soit d'Anosov sur T_KX, on a alors*

$$\forall y \in K,\ E^s(x) \subset G_-(x) \subset E^s(x) \oplus E^c(x)$$
$$\forall y \in K,\ E^u(x) \subset G_+(x) \subset E^u(x) \oplus E^c(x)$$

Démonstration. Les premières inclusions découle du critère dynamique. Ensuite, on prend l'orthogonal symplectique de ces inclusions, et puisque les fibrés de Green sont lagrangiens on trouve

$$(G_-(y))^\perp = G_-(y) \subset (E^s(y))^\perp \text{ et } (G_+(y))^\perp = G_+(y) \subset (E^u(y))^\perp$$

Maintenant, on vérifie que E^s et E^u sont isotropes : le flot étant hamiltonien, on trouve que sa différentielle préserve la forme symplectique en tout temps t. On a ensuite pour v, v' dans $E^s(y)$ $\omega(v, v') = \omega(d\phi_t v, d\phi_t v') \to 0$ pour $t \to \infty$. On applique le même raisonnement pour E^u mais en temps négatif.

De plus on a vu que $\mathbb{R}X_H \subset G_- \cap G_+$, donc $E^s \oplus E^c \subset (E^s)^\perp$ et $E^u \oplus E^c \subset (E^u)^\perp$. Enfin un argument de dimension montre que ces inclusions sont des égalités, et on peut conclure. □

3.4 Note sur les points conjugués, champs de Jacobi en géométrie Riemannienne

Nous venons de voir que la construction des fibrés de Green nécessite que le long d'une trajectoire du flot hamiltonien il n'y ait pas de *points conjugués*. Dans la littérature de la géométrie Riemannienne, on trouve une autre définition de ces points. Nous expliquons ici brièvement en quoi la définition utilisé ici est en fait une généralisation permettant de se passer de l'appareillage riemannien.

Cette dernière sous-section doit être considéré plus comme une note historique que comme une construction et démonstration mathématique, nous mentionnerons certains objets et résultats sans

rentrer dans les détails techniques.

En géométrie riemannienne, on peut s'intéresser à la valeur $||(d\exp_p)_v(w)||$, car intuitivement, elle représente le taux de propagation des géodésiques partant du point p. Si on pose $f(t,s) = \exp_p(t(v+sw))$, on trouve $J(t) \coloneqq \frac{\partial f}{\partial s}(t,0) = (d\exp_p)_{tv}(tw)$. Si maintenant on différencie J selon t, on obtient *l'équation de Jacobi*.

Définition 3.33. *Soit (M,g) une variété riemannienne, $\gamma : [0,a] \to M$ une géodésique sur M. Un champ de vecteur le long de γ J est dit de Jacobi s'il vérifie l'équation de Jacobi :*

$$\frac{\nabla^2 J}{dt^2}(t) + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0$$

pour tout t dans $[0,a]$.

Où $\frac{\nabla^2}{dt^2}$ correspond a la dérivé covariante par rapport à la connexion de Levi-Civita et R est le tenseur de courbure.

Définition 3.34. *Soit (M,g) une variété riemannienne, soit p,q deux points sur la variété connecté par une géodésique γ. On dit qu'ils sont conjugués s'il existe un champ de Jacobi non identiquement nul qui s'annule en p et q. C'est à dire tel que $J(t_1) = J(t_2) = 0$ avec $\gamma(t_1) = p$, $\gamma(t_2) = q$.*

Quel est alors le lien avec notre définition ? Lorsqu'on s'intéresse aux géodésiques sur une variété riemannienne et surtout à leurs dynamiques, on passe par l'étude du flot géodésique : le flot dont les orbites sont des géodésiques. Lorsqu'on veut coupler la géométrie riemannienne avec le formalisme de la mécanique hamiltonienne, on se rend alors compte que le flot géodésique peut s'écrire comme un flot hamiltonien, dont la fonction hamiltonienne est $H(x,\xi) = \frac{1}{2}||\xi||^2_{x,op}$, pour (x,ξ) dans T^*M.

On peut vérifier qu'un tel Hamiltonien est bien de Tonelli, et que les ensembles de niveaux $H^{-1}(\{k\})$ sont compacts dans T^*M. Comme H est conservé, le flot est complet. Le lagrangien associé est bien $(x,v) \to \frac{1}{2}||v||^2_x$, il est quadratique, donc strictement convexe et superlinéaire.

On peut alors vérifier que dans ce cas, il y a équivalence entre les définitions : si deux points sont conjugués au sens riemannien, alors les verticales de leur espaces tangents respectifs, une fois ramené dans le même tangent par la différentielle du flot, vont avoir une intersection non triviale, soit sont conjugué au sens "symplectique". Et réciproquement.

En effet, tout champ de Jacobi $J(t)$ le long d'une géodésique $\gamma(t_1+t) = \pi^* \circ \phi_H((q_1,p_1),t)$ s'obtient à partir du flot hamiltonien de la façon suivante :

$$J(t) = \pi^*(d\phi^t_H(w_0)) = \pi^*(w_t)$$

pour certain vecteur $w_0 \in T_{(\gamma(0),\, p(0))}T^*M$ où $p(0) = \dot{\gamma}(0)$. Il est donc clair qu'est vertical ($w_t \in V(t)$) si et seulement si $J(t) = 0$. Revenant à la définition de points conjugués, on déduit qu'il existe un champ de Jacobi non trivial $J(t)$ au long de la géodésique γ, s'annulant sur $q_1 = \gamma(0)$ et $q_2 = \gamma(t_2 - t_1)$ si et seulement si il existe $w \in V_{t_1}$ tel que $d\phi_H^{t_2-t_1}(w) \in V_{t_2}$ ce qui correspond bien a la définition qu'on a donné auparavant pour la notion de points conjugués.

L'étude des points conjugués en géométrie riemannienne est classique car ils ont un sens géométrique profond. Notamment, les points conjugués indiquent quand les géodésiques ne sont plus les chemins les plus courts. Par exemple, sur la sphère, deux points antipodaux sont conjugués,

et c'est justement à "partir de cette longueur là" que les géodésiques ne sont plus uniquement minimisantes : une géodésique reliant le pôle Nord au Sud ne va pas être l'unique solution de courbe minimisante, et si on prolonge encore un peut la géodésique, elle ne minimise plus du tout la distance entre ses points de départ et d'arrivée.

Références

[1] Marie-Claude Arnaud. "Fibrés de Green et régularité des graphes C-lagrangiens invariants par un flot de Tonelli". In : *Annales Henri Poincaré* 9.8 (2008), p. 1491-1514. doi : 10.1007/s00023-008-0404-3.

[2] Manfredo P. do Carmo. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, 1992. isbn : 978-0817634902.

[3] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2013. isbn : 978-1441999817.

[4] Charles-Michel Marle. *Géométrie symplectique et géométrie de Poisson*. Calvage et Mounet, 2025. isbn : 9782493230300.

[5] Federico Rodriguez-Hertz et Pablo Carrasco. "Partially Hyperbolic Dynamics and Rigidity". In : *School and Conference in Dynamical Systems*. ICTP-ESF, 2012.

[6] Rafael Ruggiero. "Dynamics and Global Geometry of Manifolds without Conjugate Points". In : *Annales Henri Poincaré* 8.5 (2007), p. 1023-1049. doi : 10.1007/s00023-007-0014-3.

[7] Ana Cannas da Silva. *Lectures on Symplectic Geometry*. T. 1764. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 2001. isbn : 978-3540421955.